Funkcionálanalízis

Tarcsay Zsigmond

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2018

A kötet az Eötvös Loránd Tudományegyetem tankönyv- és jegyzetpályázatán elnyert forrás felhasználásával, valamint az Emberi Erőforrások Minisztérium „Nemzet Fiatal Tehetségeiért Ösztöndíj” (NTP-NFTÖ-17-B-0254) támogatásával jelent meg.

Szakmai lektor: Titkos Tamás

ISBN: 978-963-489-091-1

A kézirat lezárva: 2018.

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Normált terek

1.1. Normák és normált terek

1.1. Definíció. Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. Egy $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ függvényt E feletti *normának* nevezünk, ha teljesülnek rá az alábbi feltételek:

(a) minden $x \in E$ esetén az $x = 0$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\|x\| = 0$,

(b) minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in E$ esetén $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (azaz a $\|\cdot\|$ függvény *abszolút homogén*),

(c) minden $x, y \in E$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (azaz teljesül az ún. *háromszög-egyenlőtlenség*).

Ekkor az $(E, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük a $\mathbb{K}$ számtest felett. Ha $\|\cdot\|$ olyan $E \to \mathbb{R}_+$ függvény, amelyre csupán a fenti (b) és (c) tulajdonságok teljesülnek, akkor ezt a függvényt E feletti *félnormának* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az E-beli norma fenti definíciójában az (a) feltétel helyett elegendő azt feltenni, hogy $\|x\| = 0$ esetén $x = 0$ következik, ui. a (b) alatti abszolút homogenitás miatt

$$\|0\| = \|0 \cdot 0\| = 0 \cdot \|0\| = 0,$$

vagyis $\|0\| = 0$.

A továbbiakban megállapodunk abban hogy a normált tereket - hacsak félreértést nem okoz - csupán az alaphalmaz szimbólumával jelöljük.

1.2. Állítás. *Legyen E normált tér a $\mathbb{K}$ számtest felett, ekkor tetszőleges $x, y \in E$ esetén fennáll az*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenség alapján világos, hogy

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

amit átrendezve $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ adódik. Hasonlóan igazolható az $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$ összefüggés, amiből már a kívánt egyenlőtlenség adódik. ■

1.3. Állítás. *Ha E normált tér, akkor az alábbi*

$$d_{\|\cdot\|} : E \times E \to \mathbb{R}_+; \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezés metrika az E halmaz felett. Ezt a metrikát nevezzük a norma által indukált metrikának.

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in E$ tetszőleges vektorok, hogy $d_{\|\cdot\|}(x, y) = 0$, akkor a $d_{\|\cdot\|}$ függvény értelmezése szerint $\|x - y\| = 0$, ami az 1.1 Definícióbeli (a) feltétel értelmében pontosan akkor teljesül, ha $x - y = 0$, azaz $x = y$. A $d_{\|\cdot\|}$ függvény szimmetrikusságának igazolásához legyenek ismét $x, y \in E$ tetszőleges vektorok, ekkor a $\| \cdot \|$ norma függvény abszolút homogenitását használva

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d_{\|\cdot\|}(y, x).$$

Végül a háromszög-egyenlőtlenség igazolásához legyenek $x, y, z \in E$ tetszőleges vektorok, ekkor

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(x, z) = \|x - z\| &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| = d_{\|\cdot\|}(x, y) + d_{\|\cdot\|}(y, z). \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk, hogy a $d_{\|\cdot\|}$ függvény kielégíti a metrikák követelményrendszerét. ■

A továbbiakban a normált tereket metrikus térnek tekintjük, éspedig azokat minden esetben a norma által indukált metrikával látjuk el. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy minden olyan metrikus és topológiai fogalom értelmezhető normált terekben, ami metrikus terekben értelmezett. Többek között beszélhetünk normált terbeli nyílt, zárt, illetve kompakt halmazokról, valamint konvergens és Cauchy-tulajdonságú sorozatokról. Sőt normált térben értelmet kap a sor fogalma, amely természetesen egy általános metrikus térben értelmezhetetlen volna.

Az alábbiakban emlékeztetünk metrikus térben haladó konvergens, illetve Cauchy-sorozatok fogalmára.

Legyen (X, d) egy metrikus tér és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy X-ben haladó sorozat. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál az $x \in X$ ponthoz (jelölésben $x_n \to x$) ha $d(x_n, x) \to 0$, vagyis tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ esetén $d(x_n, x) < \varepsilon$. Ilyenkor az $x \in X$ (egyértelműen meghatározott) pontot az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *határértékének* vagy *limeszének* nevezzük.

Az X metrikus térbeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot *Cauchy-tulajdonságú sorozatnak* (vagy röviden *Cauchy-sorozatnak*) nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $\mathbb{N} \ni n, m$-re $n, m \geq N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Könnyen igazolható, hogy minden metrikus térbeli konvergens sorozat egyúttal Cauchy-tulajdonságú sorozat is, ennek megfordítása azonban általában nem igaz. Az olyan metrikus tereket, amelyekben minden Cauchy-tulajdonságú sorozat konvergens, *teljes metrikus tereknek* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a normából származtatott metrika, illetve az ehhez tartozó topológia szoros kapcsolatban van a vektortér struktúrával. Ezt szemlélteti az alábbi állítás is:

1.4. Állítás. *Tetszőleges E normált térben teljesülnek az alábbiak:*

(a) *Bármely $x \in E$ és $r > 0$ esetén az E-beli x közepű nyílt (illetve zárt) gömb azonos a $0 \in E$ közepű r-sugarú nyílt (illetve zárt) gömb x-szel való eltoltjával, vagyis*

$$B_r(x) = x + B_r(0), \qquad \bar{B}_r(x) = x + \bar{B}_r(0).$$

(b) *A $0 \in E$ közepű $r > 0$ sugarú nyílt (illetve zárt) gömb azonos a $0 \in E$ közepű nyílt (illetve zárt) egységgömb r-rel való szorzatával, vagyis*

$$B_r(0) = rB_1(0), \qquad \bar{B}_r(0) = r\bar{B}_1(0).$$

Bizonyítás. (a) Legyen először $y \in B_r(x)$, azaz $y \in E$, $\|x - y\| < r$, ekkor $z := x - y$ jelöléssel $z \in B_r(0)$ és $y = x + z \in x + B_r(0)$. Fordítva, ha y előáll az $y = x + z$ alakban valamely $z \in B_r(0)$ mellett, akkor $\|y - x\| = \|z\| < r$, vagyis $y \in B_r(x)$. Teljesen analóg módon igazolható a $\bar{B}_r(x) = x + \bar{B}_r(0)$ összefüggés.

(b) Legyen először $x \in B_r(0)$, ekkor $\|\frac{x}{r}\| < 1$, vagyis $y := \frac{x}{r}$ jelöléssel $y \in B_1(0)$ és $x = ry \in rB_1(0)$. Megfordítva, ha $x = ry$ alakú valamely $y \in B_1(0)$ vektor mellett, akkor a norma függvény abszolút homogenitása alapján $\|x\| = \|ry\| = r\|y\| < r$, vagyis $x \in B_r(0)$. Analóg módon igazolható a $\bar{B}_r(0) = r\bar{B}_1(0)$ összefüggés. ■

A fenti állítás (a) és (b) pontjai együttesen azt jelentik, hogy az E normált tér tetszőleges $x \in E$ pontjának az alábbi

$$\mathscr{B}(x) := \{x + rB_1(0) \mid r > 0\}$$

halmazrendszer a norma-topológia szerinti nyílt környezetbázisát adja. Másszóval, egy normált tér topológiájának teljes leírásához elegendő a 0 középű egy-sugarú nyílt gömb ismerete.

1.5. Definíció. Az E normált teret *Banach-térnek* nevezzük, ha E a norma által indukált metrikával teljes, vagyis minden E-ben haladó Cauchy-tulajdonságú sorozat konvergens.

A következő állításban a norma és a műveletek kapcsolatát vizsgáljuk meg.

1.6. Állítás. *Legyen E normált tér a $\mathbb{K}$ test felett, legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-ben haladó sorozatok, $x, y \in E$, illetve legyen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat és $\lambda \in \mathbb{K}$.*

(a) *Ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $x_n + y_n \to x + y$.*
(b) *Ha $x_n \to x$ és $\lambda_n \to \lambda$, akkor $\lambda_n x_n \to \lambda x$.*
(c) *Ha $x_n \to x$, akkor $\|x_n\| \to \|x\|$.*

Bizonyítás. (a) A háromszög-egyenlőtlenségből adódóan

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0,$$

amivel (a)-t igazoltuk.
(b) Ismét a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával és a $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátosságából következik, hogy

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| = |\lambda_n|\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\|x\| \to 0,$$

ami (b)-t igazolja.
(c) Nyilvánvalóan következik a 1.2 Állításból, hiszen ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-beli sorozat, amely konvergál az $x \in E$ vektorhoz, akkor

$$\Big|\|x_n\| - \|x\|\Big| \leq \|x_n - x\| \to 0,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $\|x_n\| \to \|x\|$. ■

1.7. Következmény. *Legyen E normált tér, $a \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor az $u : E \to E; x \mapsto x + a$ és $v : E \to E; x \mapsto \lambda x$ leképezések homeomorfizmusok.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az u, v függvények mindegyike bijekció, az inverzükre pedig $u^{-1}(x) = x - a$, illetve $v^{-1}(x) = \lambda^{-1}x$ teljesül. Az előző állításból azonnal következik, hogy mind u, v, mind pedig u^{-1}, v^{-1} folytonos függvények, ami pedig éppen azt jelenti, hogy u és v mindketten homeomorfizmusok. ■

1.8. Következmény. *Legyen E normált tér.*

(a) *Az* $s : E \times E \to E;\ (x, y) \mapsto x + y$ *összeadás függvény folytonos, ahol az* $E \times E$ *vektorteret az* $\|(x, y)\|_{E\times E} := \|x\| + \|y\|$ *normával láttuk el.*
(b) *Az* $m : \mathbb{K} \times E \to E;\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *skalárral való szorzás függvény folytonos, ahol a* $\mathbb{K} \times E$ *vektorteret az* $\|(\lambda, x)\|_{\mathbb{K}\times E} := |\lambda| + \|x\|$ *normával láttuk el.*
(c) *A* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{K}$ *norma függvény folytonos.*

Bizonyítás. Mindhárom állítás nyilvánvaló a 1.6 Állítás megfelelő pontjából. ■

1.9. Következmény. *Normált tér lineáris alterének lezártja is lineáris altér.*

Bizonyítás. Legyen F lineáris altere az E normált térnek, és legyen $x, y \in \overline{F}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. A feltétel szerint választhatók olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F-ben haladó sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$. Ekkor minden n-re $x_n + y_n \in F$ és $\lambda x_n \in F$, ezért a műveletek folytonossága alapján

$$x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) \in \overline{F}, \qquad \text{és} \qquad \lambda x = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n \in \overline{F},$$

ami azt jelenti, hogy $\overline{F}$ lineáris altér E-ben. ■

1.2. Folytonos lineáris operátorok normált terek közt

A fejezet első eredményében jellemzést adunk normált terek közti lineáris operátorok folytonosságára.

1.10. Tétel. *Legyen* E *és* F *normált tér, és legyen* $A : E \to F$ *lineáris operátor. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:*
(i) *létezik olyan* $C \geq 0$ *konstans, hogy minden* $x \in E$ *mellett* $\|Ax\| \leq C\|x\|$*,*
(ii) A *Lipschitz-folytonos, vagyis létezik olyan* $C \geq 0$ *konstans, hogy minden* $x, y \in E$ *mellett*

$$\|Ax - Ay\| \leq C\|x - y\|,$$

(iii) A *folytonos,*
(iv) A *folytonos a* 0*-ban,*
(v) *Létezik olyan* $x \in E$ *pont, amelyben* A *folytonos,*
(vi) A *korlátos a* $\bar{B}_1(0, E)$ *halmazon, vagyis*

$$\sup\{\|Ax\| \mid x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in E$ tetszőleges vektorok, akkor (i) alapján

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq C\|x - y\|,$$

ami igazolja az (i)⇒(ii) implikációt. A (ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v) következtetések nyilvánvalóak. Tegyük fel hogy (v) teljesül, és legyen $x \in E$ olyan pont, ahol A folytonos. Ekkor létezik olyan $r > 0$, hogy

$$Ax + A\langle\bar{B}_r(0, E)\rangle = A\langle\bar{B}_r(x, E)\rangle \subseteq \bar{B}_1(Ax, F) = Ax + \bar{B}_1(0, F),$$

amiből $A\langle\bar{B}_r(0, E)\rangle \subseteq \bar{B}_1(0, F)$ következik. Speciálisan, tetszőleges $x \in E$, $\|x\| \leq 1$ esetén

$$r\|Ax\| = \|A(rx)\| \leq 1,$$

ahonnan $\sup\{\|Ax\| \,|\, x \in E, \|x\| \leq 1\} \leq 1/r$ adódik, ami az (v)⇒(vi) implikációt igazolja. Végül tegyük fel, hogy (vi) teljesül, és jelölje C a megfelelő szuprémumot. Ekkor tetszőleges $x \in E, x \neq 0$ esetén $\frac{x}{\|x\|} \in \bar{B}_1(0, E)$, így

$$\frac{1}{\|x\|}\|Ax\| = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq C$$

amit átrendezve éppen az (i) összefüggést kapjuk. ■

1.11. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a fenti (vi) tulajdonság ekvivalens azzal, hogy tetszőleges E-beli korlátos halmaz A általi képe korlátos. Emiatt a folytonos lineáris operátorokat szokás *korlátos operátoroknak* is nevezni. Vigyázzunk arra, hogy a triviális $A = 0$ esettől eltekintve az E halmaz A általi képe nem lesz korlátos, vagyis a (vi) tulajdonság nem ugyanaz, mint a metrikus terek közti függvények körében bevezetett eredeti értelemben vett korlátosság. Ez azonban nem okozhat félreértést.

1.12. Definíció. Legyenek E és F normált terek, ekkor $\mathscr{B}(E; F)$ jelöli az $E \to F$ (az E-n mindenütt értelmezett) folytonos lineáris operátorok halmazát, vagyis

$$\mathscr{B}(E; F) = \{A : E \to F \,|\, A \text{ folytonos és lineáris}\}.$$

Az $F = E$ esetben pedig a $\mathscr{B}(E; E)$ jelölés helyett a rövidebb $\mathscr{B}(E)$ jelölést, az $F = \mathbb{K}$ esetben pedig a $\mathscr{B}(E; \mathbb{K})$ helyett az E' jelölést alkalmazzuk. Az E' teret az E *topologikus duálisának*, E' elemeit pedig *folytonos lineáris funkcionáloknak* nevezzük.

Vegyük észre, hogy két $\mathscr{B}(E; F)$-beli folytonos lineáris operátor összege is $\mathscr{B}(E; F)$-beli, illetve egy $\mathscr{B}(E; F)$-beli lineáris operátor tetszőleges skalárszorosa is $\mathscr{B}(E; F)$-beli, vagyis $\mathscr{B}(E; F)$ vektortér a szokásos pontonkénti műveletekre nézve.

1.13. Tétel. *Legyenek E és F normált terek és legyen $A \in \mathscr{B}(E; F)$ egy folytonos lineáris operátor. Ekkor fennállnak az alábbi egyenlőségek:*

$$\begin{aligned}\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} &= \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\in \bar{B}_1(0,E)} \|Ax\| = \sup_{x\in B_1(0,E)} \|Ax\| \\ &= \inf\{C \geq 0 \,|\, (\forall x \in E) :\; \|Ax\| \leq C\|x\|\}\end{aligned}$$

Bizonyítás. Jelöljük rendre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ szimbólumokkal a megfelelő mennyiségeket. Megmutatjuk, hogy $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta \leq \varepsilon \leq \alpha$. Az első egyenlőtlenség (sőt egyenlőség) nyilvánvalóan teljesül az

$$\{x \,|\, x \in E, \|x\| = 1\} = \left\{\frac{x}{\|x\|} \,\middle|\, x \in E \setminus \{0\}\right\}$$

összefüggés miatt. A $\beta \leq \gamma$ egyenlőtlenség szintén nyilvánvaló. A $\gamma \leq \delta$ összefüggés igazolásához legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $[0, 1[$-ben haladó sorozat, amelyre $r_n \to 1$ teljesül, és legyen $x \in \bar{B}_1(0, E)$. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $r_n x \in B_1(0, E)$, így $\|A(r_n x)\| \leq \delta$. Másrészt $r_n x \to x$, így az A operátor folytonossága miatt

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A(r_n x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \|A(r_n x)\| \leq \delta,$$

amiből $\gamma \leq \delta$ adódik. Legyen ezután $C \geq 0$ olyan, hogy $\|Ax\| \leq C\|x\|$ teljesül minden $x \in E$ mellett. Ekkor tetszőleges $x \in B_1(0, E)$ mellett $\|Ax\| \leq C$ teljesül, vagyis $\delta \leq C$. Az infimum extremalitását kihasználva tehát $\delta \leq \varepsilon$. Végül vegyük észre, hogy $\varepsilon < \infty$ az

A operátor folytonossága miatt, vagyis az eddig igazolt egyenlőtlenség-lánc értelmében mindegyik mennyiség véges. Ha továbbá $x \in E \setminus \{0\}$ tetszőleges, akkor

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha, \tag{1.1}$$

amit átrendezve $\|Ax\| \leq \alpha\|x\|$. Ebből pedig az infimum értelmezése alapján $\varepsilon \leq \alpha$ adódik. ■

1.14. Definíció. Ha E és F normált tér, $A \in \mathscr{B}(E;F)$, akkor az alábbi

$$\|A\| := \sup_{x \in \bar{B}_1(0,E)} \|Ax\| \tag{1.2}$$

számot az A *operátornormájának* nevezzük. Ha $F = \mathbb{K}$, akkor az $E' = \mathscr{B}(E;\mathbb{K})$ feletti operátornormát *funkcionálnormának* mondjuk.

Vegyük észre, hogy a fenti 1.13 Tétel valemennyi formulája éppen az $\|A\|$ értékét adja. Továbbá ugyanezen tétel bizonyításában ((1.1) egyenlőtlenség) bizonyítottuk az alábbi fontos eredményt, mely a későbbiekben gyakran felhasználásra kerül majd:

1.15. Állítás. *Legyenek E és F normált terek valamint legyen $A \in \mathscr{B}(E;F)$ egy folytonos lineáris operátor. Ekkor tetszőleges $x \in E$ esetén fennáll, hogy*

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|. \tag{1.3}$$

A fenti állítást másképpén úgy is megfogalmazhatjuk, hogy

$$\|A\| = \min\{C \geq 0 \,|\, (\forall x \in E) : \ \|Ax\| \leq C\|x\|\}.$$

Vigyázzunk azonban, hogy az operátornormát definiáló (1.2) formulában szereplő szuprémum általában valódi szuprémum, vagyis nem feltétlenül létezik olyan $x \in \bar{B}_1(0,E)$ vektor, amelyre $\|Ax\| = \|A\|$ teljesülne. (Ennek oka, hogy egy normált tér zárt egységgömbje általában nem kompakt halmaz.)

1.16. Állítás. *Legyen E és F normált tér, ekkor a $\|\cdot\| : \mathscr{B}(E;F) \to \mathbb{R}_+$ operátornorma teljesíti a normák követelményrendszerét, vagyis $(\mathscr{B}(E;F), \|\cdot\|)$ normált tér.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy minden $A \in \mathscr{B}(E;F)$ esetén $\|A\| \geq 0$, emellett $\|A\| = 0$ pontosan akkor, ha $A = 0$ (vagyis A az azonosan 0 operátor). Az abszolút homogenitás ellenőrzéséhez legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ és $A \in \mathscr{B}(E;F)$, ekkor az operátornorma értelmezése alapján

$$\|\lambda A\| := \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|(\lambda A)x\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\lambda|\|Ax\| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Ax\| = |\lambda|\|A\|.$$

Ha pedig $A, B \in \mathscr{B}(E;F)$ tetszőleges operátorok, akkor

$$\begin{aligned} \|A+B\| :&= \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|(A+B)x\| \leq \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \Big(\|Ax\| + \|Bx\|\Big) \\ &\leq \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Ax\| + \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|, \end{aligned}$$

amivel a háromszög-egyenlőtlenséget is beláttuk. ■

A következő állítás előtt emlékeztetünk arra, hogy A és B lineáris operátorok kompozíciójára a függvények körében megszokott $A \circ B$ jelölés helyett az AB szorzat-jelölést szokás alkalmazni, ebben a jegyzetben is követjük ezt a konvenciót.

1.17. Állítás. *Legyenek E, F és G normált terek. Ha $A \in \mathscr{B}(F;G)$ és $B \in \mathscr{B}(E;F)$, akkor $AB \in \mathscr{B}(E;G)$ és $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.*

Bizonyítás. Lineáris operátorok kompozíciója lineáris operátor. Másrészt tetszőleges $x \in E$ esetén az (1.3) egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\|\|Bx\| \le \|A\|\|B\|\|x\|$$

adódik. Következésképp AB folytonos és $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$. (Az operátornormának ezt a tulajdonságát szubmultiplikativitásnak nevezzük.) ■

1.18. Állítás. *Legyen E, F és G normált tér, valamint legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{B}(F;G)$-ben, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pedig $\mathscr{B}(E;F)$-ben haladó sorozat. Ha $A \in \mathscr{B}(F;G)$ és $B \in \mathscr{B}(E;F)$ olyan operátorok, hogy $A_n \to A$ és $B_n \to B$ a megfelelő operátornormák szerint, akkor $A_nB_n \to AB$ az operátornorma szerint.*

Bizonyítás. A hipotézis szerint $\|A_n - A\| \to 0$ és $\|B_n - B\| \to 0$, következésképp

$$\begin{aligned}\|A_nB_n - AB\| &\le \|A_nB_n - A_nB\| + \|A_nB - AB\| \\ &\le \|A_n\|\|B_n - B\| + \|A_n - A\|\|B\| \to 0,\end{aligned}$$

az operátornorma szubmultiplikativitása miatt. ■

A következő definíció előtt emlékeztetünk rá, hogy egy $\mathscr{A} := (\mathscr{A}, +, ., \cdot)$ négyest *algebrának* nevezünk a K test felett, ha $(\mathscr{A}, +, .)$ K feletti vektortér, továbbá $\cdot$ olyan $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal: bármely $x, y, z \in \mathscr{A}$ és $\lambda \in K$ mellett

$$\begin{gathered}(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \\ (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x, \\ \lambda.(x \cdot y) = (\lambda.x) \cdot y = x \cdot (\lambda.y).\end{gathered}$$

1.19. Definíció. Az $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ párt *normált algebrának* nevezzük, ha $\mathscr{A}$ algebra a $\mathbb{K}$ test felett, $\|\cdot\|$ pedig olyan norma $\mathscr{A}$ vektortéren, amely *szubmultiplikatív*, azaz minden $x, y \in \mathscr{A}$ esetén

$$\|xy\| \le \|x\|\|y\|$$

teljesül. Az $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ normált algebrát *Banach-algebrának* mondjuk, ha $\mathscr{A}$ teljes a $\|\cdot\|$ normára nézve.

A korábbi eredményeink közvetlen következménye az alábbi

1.20. Következmény. *Ha E normált tér, akkor $\mathscr{B}(E)$ normált algebra.*

1.21. Tétel. *Ha E normált tér és F Banach-tér, akkor $\mathscr{B}(E;F)$ az operátornomával szintén Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{B}(E;F)$-ben haladó Cauchy-tulajdonságú operátorsorozat, akkor bármely $x \in E$ vektor és $n, m \in \mathbb{N}$ esetén fennáll, hogy

$$\|A_nx - A_mx\| \le \|A_n - A_m\|\|x\|,$$

amiből következik, hogy $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén Cauchy-sorozat az F Banach-térben. Az F teljessége miatt egyértelműen létezik a $\lim_{n\to\infty} A_n x \in F$ határérték, vagyis jól értelmezett az az $A : E \to F$ függvény, amelyet az

$$A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n x, \qquad x \in E$$

egyenlőséggel definiálunk. Megmutatjuk, hogy $A \in \mathscr{B}(E;F)$ (vagyis A folytonos lineáris leképezés) és $\|A_n - A\| \to 0$. Az A függvény linearitásának ellenőrzéséhez legyenek először $x, y \in E$ tetszőleges vektorok. Az összeadás folytonossága következtében

$$A(x+y) := \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (A_n x + A_n y) = \lim_{n\to\infty} A_n x + \lim_{n\to\infty} A_n y = Ax + Ay,$$

ami az A leképezés additivitását igazolja. Hasonlóképp, ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in E$, akkor a skalárral való szorzás műveletének folytonossága alapján

$$A(\lambda x) := \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda A_n x = \lambda\Big(\lim_{n\to\infty} A_n x\Big) = \lambda(Ax),$$

amivel A homogenitását is igazoltuk. Megmutatjuk, hogy A korlátos: ehhez először vegyük észre, hogy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat $\mathscr{B}(E;F)$-ben. Valóban, e sorozat Cauchy-tulajdonságát felhasználva $\varepsilon := 1$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n, m \in \mathbb{N}$ természetes számokra $n, m \geq N$ esetén $\|A_n - A_m\| \leq 1$. Ebből $m := N$ választással

$$\|A_n\| - \|A_N\| \leq \|A_n - A_N\| \leq 1,$$

vagyis $\|A_n\| \leq \|A_N\| + 1$ teljesül minden $n \geq N$ számra, amiből már látható, hogy az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat korlátos. Ebből már egyszerűen következik az A limesz-operátor folytonossága: legyen ui. $M \geq 0$ az $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat egy felső korlátja, akkor bármely $x \in E$ vektorra $\|A_n x\| \leq M\|x\|$, amiből

$$\|Ax\| = \Big\|\lim_{n\to\infty} A_n x\Big\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq M\|x\|,$$

ami a 1.10 Tétel értelmében azt jelenti, hogy A korlátos és $\|A\| \leq M$. Végül megmutajuk, hogy az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat A-hoz konvergál, azaz $\|A_n - A\| \to 0$. Ehhez legyen $\varepsilon > 0$ teszőleges pozitív szám, és válasszunk olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, amelyre $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ teljesül valahányszor $n, m \geq N$. Ekkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}, m \geq N$ rögzített számra és $x \in E, \|x\| \leq 1$ vektorra $A_n x - A_m x \to Ax - A_m x$, amidőn $n \to \infty$, ezért

$$\|(A - A_m)x\| = \lim_{n\to\infty} \|(A_n - A_m)x\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon,$$

tehát

$$\|A - A_m\| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|(A - A_m)x\| \leq \varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\|A - A_m\| \leq \varepsilon$ teljesül bármely $m \in \mathbb{N}, m \geq N$ mellett, vagyis az $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat az $A \in \mathscr{B}(E;F)$ operátorhoz tart a $\mathscr{B}(E;F)$-beli operátornorma szerint, azaz az $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat konvergens. ■

A későbbiekben legtöbbször a fenti tétel alábbi két fontos következményét fogjuk alkalmazni.

1.22. Következmény. *Ha E Banach-tér, akkor $\mathscr{B}(E)$ Banach-algebra.*

1.23. Következmény. *Ha E normált tér, akkor $E' = \mathscr{B}(E; \mathbb{K})$ a funkcionálnormával Banach-tér.*

Az operátornorma fent igazolt tulajdonságai alapján könnyen látható, hogy ha egy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{B}(E;F)$-beli operátorsorozat egy $A \in \mathscr{B}(E;F)$ operátorhoz konvergál az operátornorma szerint, akkor bármely $x \in E$ vektor esetén $A_n x \to Ax$ teljesül, vagyis az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat *pontonként konvergál* A-hoz az E halmazon. Valóban, ha $x \in E$, akkor

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\|\|x\| \to 0,$$

ami e konvergenciát igazolja. Ezzel tehát igazoltuk a következőt:

1.24. Állítás. *Legyen E és F normált tér. Ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{B}(E;F)$-beli sorozat, amely operátornormában konvergál az $A \in \mathscr{B}(E;F)$ operátorhoz, akkor minden $E \ni x$-re $A_n x \to Ax$ teljesül, vagyis az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként is konvergál A-hoz.*

Nem nehéz azonban példát mutatni olyan operátorsorozatra, amely pontonként konvergál egy folytonos lineáris operátorhoz, de e sorozat az operátornormában nem konvergens. Igaz ugyanis a következő:

1.25. Állítás. *Legyen E és F normált tér, ekkor egy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{B}(E;F)$-ben haladó operátorsorozat pontosan pontosan akkor konvergál egy $A \in \mathscr{B}(E;F)$ operátorhoz az operátornorma szerint, ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál A-hoz a $\bar{B}_1(0,E)$ halmazon.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló az

$$\sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|A_n x - Ax\| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|(A_n - A)x\| = \|A_n - A\|$$

összefüggésekből. ∎

1.3. Folytonos lineáris operátor kiterjesztése

Az alábbi tétel normált tér lineáris alterén értelmezett folytonos lineáris operátorának a kérdéses altér lezártjára való kiterjeszthetőségéről szól.

1.26. Tétel. *Legyen E normált tér és F Banach-tér. Ha E_0 lineáris altere E-nek, és $A_0 : E_0 \to F$ folytonos lineáris operátor, akkor létezik egyetlen olyan $A : \overline{E_0} \to F$ folytonos lineáris operátor, amely A_0 kiterjesztése, vagyis amelyre*

$$A|_{E_0} = A_0$$

teljesül. Fennáll továbbá az $\|A_0\| = \|A\|$ azonosság.

Bizonyítás. Az állítás unicitás része nyilvánvaló a kiterjesztő operátor folytonosságára vonatkozó feltételből. Az egzisztencia rész igazolásához legyen $x \in \overline{E_0}$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan E_0-ban haladó sorozat, amelyre $x_n \to x$. Az A_0 operátor folytonossága alapján minden $\mathbb{N} \ni n, m$-re

$$\|A_0 x_n - A_0 x_m\| \leq \|A_0\|\|x_n - x_m\|,$$

következésképp $(A_0 x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben, így F teljessége miatt konvergens. Jelölje a megfelelő határértéket y, és legyen $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén olyan E_0-ban haladó sorozat, amelyre

$x'_n \to x$. Az előzőek alapján $y' := \lim_{n\to\infty} A_0 x'_n$ F-beli határérték szintén létezik, és

$$\|y - y'\| = \left\| \lim_{n\to\infty} (A_0 x_n - A_0 x'_n) \right\| = \lim_{n\to\infty} \|A_0(x_n - x'_n)\| \le \|A_0\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|x_n - x'_n\| = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $y = y'$, vagyis a $\lim_{n\to\infty} A_0 x_n$ határérték nem függ az x-hez konvergáló $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat választásától. Másszóval jóldefiniált az az $A : \overline{E_0} \to F$ függvény, amely minden $\overline{E_0} \ni x$-hez a $\lim_{n\to\infty} A_0 x_n$ F-beli vektort rendeli, ahol $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges E_0-beli x-hez konvergáló sorozat:

$$A(x) := \lim_{n\to\infty} A_0 x_n.$$

Ha $x \in E_0$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x_n := x$ választással kapjuk, hogy $A(x) = A_0 x$, vagyis A kiterjeszti A_0-t.

Következő lépésben megmutatjuk, hogy A lineáris operátor. Ehhez legyenek $x, y \in \overline{E_0}$ tetszőlegesek és legyen $\lambda \in \mathbb{K}$. Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E_0-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, illetve $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E_0-beli sorozatok, hogy $x_n + y_n \to x + y$, illetve $\lambda x_n \to \lambda x$, ezért az A leképezés definícióját, A_0 linearitását, és a műveletek folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$A(x + y) = \lim_{n\to\infty} A_0(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n + \lim_{n\to\infty} A_0 y_n = A(x) + A(y),$$

illetve

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_0(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda A_0 x_n = \lambda A(x),$$

ami azt jelenti, hogy A valóban lineáris operátor.

Megmutatjuk, hogy A folytonos és $\|A\| \le \|A_0\|$. Legyen ugyanis $x \in \overline{E_0}$ tetszőleges vektor és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E_0-ban haladó sorozat, amelyre $x_n \to x$. Ekkor

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_0 x_n\| \le \lim_{n\to\infty} \|A_0\| \|x_n\| = \|A_0\| \|x\|, \tag{1.4}$$

amiből az A folytonossága, és egyúttal az $\|A\| \le \|A_0\|$ egyenlőtlenség is következik. Végül az operátornorma definícióját és az $A|_{E_0} = A_0$ egyenlőséget kihasználva nyerjük, hogy

$$\|A_0\| = \sup_{x\in E_0, \|x\|\le 1} \|A_0 x\| = \sup_{x\in E_0, \|x\|\le 1} \|Ax\| \le \sup_{x\in \overline{E_0}, \|x\|\le 1} \|Ax\| = \|A\|,$$

vagyis $\|A_0\| \le \|A\|$, amivel az $\|A_0\| = \|A\|$ azonosságot és egyúttal a tételt is bizonyítottuk. ∎

1.27. Definíció. A fenti tételben szereplő A operátort az A_0 operátor $\overline{E_0}$ altérre vett *normatartó kiterjesztésének* nevezzük.

A fenti kiterjesztési tételnek gyakran alkalmazzuk az alábbi két speciális esetét:

1.28. Következmény. *Legyen E_0 sűrű lineáris altere az E normált térnek.*

(a) *Ha F Banach-tér, akkor minden $A_0 : E_0 \to F$ folytonos lineáris opertátornak egyértelműen létezik $A \in \mathscr{B}(E; F)$ normatartó kiterjesztése.*

(b) *Ha $u_0 : E_0 \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, akkor u_0-nak egyértelműen létezik $u \in E'$ normatartó kiterjsztése.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló az 1.26 Tételből. ∎

1.4. Normák ekvivalenciája

Normált terek esetében számos probléma (pl. a folytonosság) nem metrikus, hanem sokkal inkább topológiai jellegű. Érdemes ezért megvizsgálni, hogy ugyanazon vektortéren definiált két különböző norma mikor határoz meg azonos topológiát. Ehhez kapcsolódik az alábbi definíció:

1.29. Definíció. Legyen E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. Az $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ E feletti normákat *ekvivalenseknek* nevezzük, ha léteznek olyan $C_1 \geq 0$, illetve $C_2 \geq 0$ számok, hogy minden $E \ni x$-re

$$\|x\|_2 \leq C_1\|x\|_1 \qquad \text{és} \qquad \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$$

teljesül.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az E feletti $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha az $E \to E$ identikus operátor (vagyis az $x \mapsto x$ leképezés) *homeomorfizmus* a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_1}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_2}$ topológiák szerint. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az ekvivalens normák által generált topológiák azonosak, így tetszőleges $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $f : E \to T$ függvény esetén f pontosan akkor $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_1} - \mathscr{T}$ folytonos, ha $\mathscr{T}_{\|\cdot\|_2} - \mathscr{T}$ folytonos.

1.30. Állítás. *Legyen E normált tér, és legyen $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ két ekvivalens norma E felett.*

(a) *Egy E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens a $\|\cdot\|_1$ norma szerint, ha konvergens a $\|\cdot\|_2$ norma szerint. Ilyenkor a megfelelő határértékek is azonosak.*

(b) *Egy E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_1$ norma szerint, ha Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_2$ norma szerint.*

(c) *E pontosan akkor Banach-tér a $\|\cdot\|_1$ normára nézve, ha Banach-tér a $\|\cdot\|_2$ normára nézve.*

Bizonyítás. (a) Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-beli sorozat, amely az $x \in E$ vektorhoz konvergál az $(E, \|\cdot\|_1)$ normált térben, azaz $\|x_n - x\|_1 \to 0$. Legyen $C_1 > 0$ az 1.29 Definíció értelmében választott pozitív konstans, ekkor

$$\|x_n - x\|_2 \leq C_1\|x_n - x\|_1 \to 0,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat x-hez konvergál az $(E, \|\cdot\|)$ normált térben. Ugyanezen elv alapján igazolható a fordított irányú következtetés.

(b) Tegyük fel először, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-beli sorozat, amely Cauchy-tulajdonságú az $\|\cdot\|_1$ norma szerint. Legyen C_1 a 1.29 Definíciónak megfelelően választott pozitív konstans, ekkor tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|x_n - x_m\| \leq C_1\|x_n - x_m\|_1$$

teljesül, amiből már nyilvánvalóan következik, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_2$ norma szerint is. Ugyanez a gondolatmenet alkalmazható a fordított irány igazolásához.

(c) Tegyük fel, hogy E Banach-tér a $\|\cdot\|_1$ normára nézve. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-ben haladó $\|\cdot\|_2$-Cauchy-sorozat; ekkor a (b) pont szerint $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy sorozat a $\|\cdot\|_1$ norma szerint is, így a hipotézis alapján konvergens az $(E, \|\cdot\|_1)$ Banach-térben. Az (a) pont alapján $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $(E, \|\cdot\|_2)$ normált térben is konvergens, ami éppen azt jelenti, hogy $(E, \|\cdot\|_2)$ teljes. Ugyanezen elv alapján igazolható a fordított irányú következtetés. ■

Az alábbi eredmény a fejezet legfontosabb tétele. Ennek tartalma többek között az, hogy véges dimenziós vektortér felett lényegében egy norma létezik; pontosabban szólva, ha két norma ugyan különbözik is, az általuk indukált topológiák ugyanazok.

1.31. Tétel. *Véges dimenziós vektortér felett bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Legyen $(E, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér és legyen $e_1, \ldots, e_n$ egy tetszőleges bázis E-ben. Ekkor tetszőleges $x \in E$ esetén egyértelműen létezik olyan $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\mathbb{K}^n$-beli vektor, hogy

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j. \tag{1.5}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az alábbi

$$\|x\|_2 := \|\alpha\|_{\mathbb{K}^n} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\right)^{1/2}, \qquad x \in E$$

formulával értelmezett $\|\cdot\|_2 : E \to \mathbb{R}_+$ függvény norma (itt természetesen α az (1.5) egyenlőségnek eleget tevő $\mathbb{K}^n$-beli vektor). Megmutatjuk, hogy $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens normák. Valóban, a háromszög-egyenlőtlenség és a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján tetszőleges $x \in E$ esetén fennáll, hogy

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2\right)^{1/2} = K\|x\|_2,$$

vagyis $\|x\| \leq K\|x\|_2$, ahol bevezettük a $K := \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2\right)^{1/2}$ jelölést. Ez egyúttal azt jelenti, hogy az $A : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|)$, $Ax := x$ identikus leképezés folytonos. Másfelől az alábbi

$$V : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}) \to (E, \|\cdot\|_2); \qquad \alpha \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

lineáris operátor szintén folytonos (sőt, izometria). Jelölje C az alábbi

$$C = \left\{x \in E \,\middle|\, \|x\|_2 = 1\right\} \tag{1.6}$$

halmazt, akkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy fennáll a $C := (AV)\langle S\rangle$ egyenlőség, ahol S a $\mathbb{K}^n$-beli egységgömb-felszín, azaz

$$S := \{\alpha \in \mathbb{K}^n \mid \|\alpha\|_{\mathbb{K}^n} = 1\}.$$

Mivel az S halmaz kompakt (hiszen korlátos és zárt részhalmaz $\mathbb{K}^n$-ben), azért a $C = (AV)\langle S\rangle$ halmaz szintén kompakt az $(E, \|\cdot\|)$ normált térben, emellett a C halmaz (1.6) alatti alakjából világos, hogy $0 \notin C$. A $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a Weierstrass-féle maximum-minimum elv alapján felveszi a minumumát a C halmazon. Jelölje m ezt a minimumot, ekkor $0 \notin C$ miatt $m > 0$. Ha továbbá $x \in E$ egy tetszőleges nem-nulla vektor, akkor $\frac{x}{\|x\|_2} \in C$ miatt

$$m \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|,$$

amit átrendezve $\|x\|_2 \le \frac{1}{m}\|x\|$ adódik. Ezzel megmutattuk, hogy bármely E feletti norma ekvivalens a $\|\cdot\|_2$ normával, amiből pedig a bizonyítandó állítás már következik. ■

A fenti tétel felhasználásával kapjuk az alábbi fontos eredményt:

1.32. Tétel. *Legyen E véges dimenziós normált tér, F pedig egy tetszőleges normált tér. Ekkor tetszőleges $A : E \to F$ lineáris operátor folytonos.*

Bizonyítás. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az alábbi $\|\cdot\|_A$ leképezés norma E felett, ahol

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|.$$

Mivel E véges dimenziós, így az előző tétel értelmében $\|\cdot\|_A$ ekvivalens az E feletti eredeti normával. Speciálisan, létezik $C > 0$, hogy minden $x \in E$ mellett $\|x\|_A \le C\|x\|$, vagyis

$$\|Ax\| \le \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A \le C\|x\|,$$

ami azt jelenti, hogy A folytonos. ■

1.33. Lemma. *Legyenek E és F normált terek. Ha létezik $A : E \to F$ lineáris homeomorfizmus, akkor E pontosan akkor Banach-tér, ha F Banach-tér.*

Bizonyítás. Az állítás szimmetrikus jellege miatt elegendő azt megmutatnunk, hogy E teljességéből következik F teljessége. Valóban, ha $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F-ben haladó Cauchy-sorozat, akkor A^{-1} folytonossága miatt $(A^{-1}y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is Cauchy sorozat E-ben, hiszen tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|A^{-1}y_n - A^{-1}y_m\| \le \|A^{-1}\|\|y_n - y_m\|.$$

Az E teljessége miatt létezik $x \in E$, hogy $A^{-1}y_n \to x$. Ekkor A folytonosságát kihasználva

$$y_n = A(A^{-1}y_n) \to Ax,$$

ami azt jelenti, hogy F teljes. ■

1.34. Tétel. *Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen E véges dimenziós normált tér és jelölje $n \in \mathbb{N}$ az E dimenzióját. Legyen $A : \mathbb{K}^n \to E$ egy lineáris bijekció. Az 1.32 Tétel szerint mind A, mind pedig A^{-1} folytonosak, ami azt jelenti, hogy A lineáris homeomorfizmus. A $\mathbb{K}^n$ tér teljessége miatt és az előző Lemma alapján E is teljes, azaz Banach-tér. ■

1.35. Következmény. *Normált tér minden véges dimenziós lineáris altere zárt.*

Bizonyítás. Legyen E normált tér, és F az E véges dimenziós lineáris altere. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F-ben haladó konvergens sorozat, $x \in E$ határértékkel. Az előző következmény szerint F az E normájának F-re vett leszűkítésével Banach-tér. Másrészt a feltétel szerint $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat ugyanezen normára nézve, következésképp létezik F-beli határértéke. A sorozathatárérték egyértelműsége miatt tehát $x \in F$, ami éppen azt jelenti, hogy F zárt E-ben. ■

1.36. Következmény. *Ha E véges dimenziós normált tér, akkor abban egy $K \subseteq E$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Jelölje n az E dimenzióját, és legyen $A : E \to \mathbb{K}^n$ lineáris bijekció. Az 1.32 Tétel szerint A homeomorfizmus (itt a $\mathbb{K}^n$ vektorteret a szokásos euklideszi normával látjuk el). Legyen K korlátos és zárt halmaz E-ben, ekkor $A\langle K\rangle$ nyilvánvalóan korlátos és zárt $\mathbb{K}^n$-ben, következésképp kompakt. Ekkor A^{-1} folytonossága miatt

$$K = A^{-1}\langle A\langle K\rangle\rangle$$

szintén kompakt. Az állítás másik iránya nyilvánvaló, hiszen metrikus tér tetszőleges kompakt részhalmaza korlátos és zárt. ■

1.37. Állítás. *Legyen E normált tér és jelölje B az E-beli zárt egységgömböt. Ha létezik olyan $x_1, x_2, \dots, x_n$ véges sok E-beli vektor és $0 < q < 1$ szám, hogy*

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + q \cdot B), \tag{1.7}$$

akkor az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorok E egy generátorrendszerét adják, speciálisan E véges dimenziós és $\dim E \le n$.

Bizonyítás. Jelölje E_0 az $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorok által kifeszített lineáris alteret, akkor az (1.7) feltétel alapján világos, hogy $B \subseteq E_0 + q \cdot B$, aminek ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$B \subseteq E_0 + q \cdot [E_0 + q \cdot B] = E_0 + q^2 \cdot B.$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy bármely $n \ge 1$ természetes szám mellett fennál az alábbi tartalmazás:

$$B \subseteq E_0 + q^n \cdot B. \tag{1.8}$$

Legyen $y \in B$ egy tetszőleges vektor, akkor (1.8) szerint kiválaszthatunk olyan $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E_0-beli és $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ B-beli sorozatokat, hogy minden n mellett

$$y = y_n + q^n z_n.$$

Mivel a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos, azért az $y_n = y - q^n z_n$ felírásból leolvasható, hogy $y_n \to y$. Ebből az E_0 véges dimenziós altér zártsága miatt következik, hogy $y \in E_0$, amivel megmutattuk, hogy $B \subseteq E_0$, amiből nyilvánvaló, hogy $E_0 = E$. ■

A fenti állítás egyszerű alkalmazásaként kapjuk a lokálisan kompakt normált terek alábbi dimenzionális jellemzését:

1.38. Következmény. *Egy normált tér zárt egységgömbje pontosan akkor kompakt, ha a tér véges dimenziós.*

Bizonyítás. Az 1.36 Következmény szerint egy véges dimenziós normált tér bármely korlátos és zárt részhalmaza kompakt, ezért elég a fordított irányt igazolnunk. Tegyük fel, hogy az E normált tér B zárt egységgömbje kompakt és legyen $0 < q < 1$ egy tetszőleges szám. Jelölje a rövidség kedvéért S az E-beli nyílt egységgömböt, akkor világos, hogy az $(x + q \cdot S)_{x\in B}$ rendszer a B egy nyílt fedését adja, ezért létezik véges sok $x_1, x_2, \dots, x_n$ B-beli vektor, hogy

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + q \cdot S).$$

Világos, hogy ekkor ugyanezen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorok mellett (1.7) is fennáll, ezért az 1.37 Állítás értelmében E véges dimenziós. ■

1.5. Normált terek szorzata

Legyen $(E_i)_{i\in\mathscr{I}}$ ugyanazon $\mathbb{K}$ test feletti normált terek egy tetszőleges nem-üres rendszere. Ekkor természetes módon felmerül a kérdés, hogy az

$$E := \prod_{i\in\mathscr{I}} E_i$$

szorzattéren megadható-e olyan norma, amely az egyes norma-topológiák által indukált szorzattopológiát generálja. A válasz erre a kérdésre általában nemleges. Ha azonban az indexhalmaz véges, úgy nem nehéz megadni ilyen normát.

Legyenek tehát $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ugyanazon $\mathbb{K}$ számtest feletti normált terek és jelölje E ezek szorzatát:

$$E := \prod_{i=1}^{n} E_i.$$

Vezessük be az alábbi

$$\|x\| := \max_{i=1,2,\ldots,n} \|x_i\|_i, \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \tag{1.9}$$

egyenlőséggel értelmezett $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ függvényt. Könnyen látható, hogy a $\|\cdot\|$ függvény norma. Fennáll továbbá az alábbi

1.39. Tétel. *Az E szorzattér feletti szorzattopológia megegyezik a $\|\cdot\|$ norma által meghatározott norma-topológiával, továbbá az $(E, \|\cdot\|)$ normált tér pontosan akkor Banach-tér, ha az $E_1, \ldots, E_n$ normált terek mindegyike Banach-tér.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{T}$ az E feletti szorzattopológiát, akkor $\mathscr{T}$ értelmezése alapján látható, hogy bármely $x \in E$ vektor esetén az alábbi

$$\mathscr{B}(x) := \left\{ \prod_{i=1}^{n} B_r(x_i, E_i) \,\middle|\, r > 0 \right\}$$

halmazrendszer az x egy $\mathscr{T}$-szerinti csupa nyílt halmazokból álló környezetbázisa. Hasonlóan, az alábbi

$$\mathscr{B}_{\|\cdot\|}(x, E) := \{B_r(x, E) \,|\, r > 0\}$$

halmazrendszer az $x \in E$ pontnak a $\|\cdot\|$ norma által meghatározott $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológia szerinti nyílt környezetbázisát adja. Ugyanakkor bármely $r > 0$ szám esetén

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} B_r(x_i, E_i) &= \{y \in E \,|\, \|x_i - y_i\|_i < r \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\} \\ &= \{y \in E \,|\, \max_{i=1,2,\ldots,n} \|x_i - y_i\|_i < r\} \\ &= B_r(x, E),\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $\mathscr{B}(x) = \mathscr{B}_{\|\cdot\|}(x)$, ami viszont egyenértékű azzal, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$.

Jelölje $1 \le i \le n$ és $x \in E$ mellett a $pr_i(x) := x_i$ az x vektor E_i-re vett vetületét. Nyilvánvaló, hogy egy $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ E-beli sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ mellett $(pr_i(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E_i-ben, illetve egy $x \in E$ vektor esetén

$x_k \to x$ pontosan akkor teljesül, ha minden i-re mellett $pr_i(x_k) \to pr_i(x)$, amiből már könnyen látható, hogy E pontosan akkor teljes, ha minden i mellett E_i teljes. ■

Megjegyezzük, hogy a fenti (1.9) alatti norma helyett tetszőleges $1 < p < \infty$ mellett értelmezhettük volna az

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\Big)^{1/p}, \qquad x \in E$$

egyenlőséggel értelmezett $\|\cdot\|_p$ normát. Egyszerűen igazolható, hogy bármely p mellett $\|\cdot\|_p$ ekvivalens az (1.9) alatti normával, speciálisan minden p-re a $\|\cdot\|_p$ norma által meghatározott topológia (is) azonos az indukált szorzat-topológiával. Ez azt jelenti, hogy topológiai szempontból mindegy, hogy E felett az itt felsorolt normák közül melyiket választjuk.

Végezetül megjegyezzük, hogy hogy a gyakorlatban szükség van tetszőleges számú normált tér szorzatának az értelmezésére is. Ezt a következő fejezetben tekintett ún. ℓ^p terek mintájára lehet megtenni. Fontos azonban hangsúlyoznunk, hogy ilyenkor az alaptér nem a teljes szorzat vektortér lesz, hanem csupán annak egy alkalmas lineáris altere. Továbbá az így nyert norma-topológia sem egyezik meg a szorzat-topológiával.

1.6. Normált faktor terek

Emlékeztetünk rá, hogy ha E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, és M lineáris altere E-nek, akkor az

$$E/M := \{x + M \mid x \in E\}$$

faktortér szintén vektortér az

$$(x + M) + (y + M) := x + y + M, \qquad \lambda(x + M) := \lambda x + M$$

műveletekre nézve, továbbá ilyenkor a

$$j : E \to E/M; \qquad x \mapsto x + M$$

kanonikus leképezés lineáris.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ha E normált tér, és M zárt altere E-nek, akkor az E/M faktortéren természetes módon értelmezhető az ún. faktornorma:

1.40. Tétel. *Legyen E normált tér és legyen $M \subseteq E$ egy zárt lineáris altér, akkor az alábbi*

$$\|x + M\|_{E/M} := \inf_{y \in M} \|x - y\| \tag{1.10}$$

leképezés norma az E/M faktortéren.

Bizonyítás. Az E/M faktortér null-eleme a $0_{E/M} := M$ halmaz, erre nyilvánvalóan teljesül a $\|0_{E/M}\|_{E/M} = 0$ feltétel. Másrészt vegyük észre, hogy $x \in E$ esetén az $\|x + M\|$ szám azonos az x vektor M halmaztól való távolságával:

$$\|x + M\|_{E/M} = d_M(x).$$

Emiatt az $\|x + M\|_{E/M} = 0$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy $x \in \overline{M}$, azaz x zártsága miatt $x \in M$, amivel igazoltuk, hogy $\|x + M\| = 0$ pontosan akkor, ha $x + M = 0_{E/M}$.

Az abszolút homogenitás bizonyításához legyenek $x \in E$ és $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ tetszőlegesek, ekkor $M = \lambda M$ figyelembevételével

$$\begin{aligned}\|\lambda x + M\| &= \inf_{y \in M} \|\lambda x - y\| = \inf_{y \in M} \|\lambda x - \lambda y'\| \\ &= \inf_{y \in M} |\lambda| \|x - y'\| = |\lambda| \cdot \inf_{y' \in M} \|x - y'\| = |\lambda| \|x + M\|.\end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenség igazolásához legyenek $x_1, x_2 \in E$ tetszőlegesek és legyen $\varepsilon > 0$. Az infimum értelmezése alapján léteznek $y_1, y_2 \in M$ vektorok, hogy

$$\|x_1 - y_1\| \leq \|x + M\|_{E/M} + \varepsilon, \quad \text{és} \quad \|x_2 - y_2\| \leq \|x_2 + M\|_{E/M} + \varepsilon.$$

Ekkor $y_1 + y_2 \in M$ miatt

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2 + M\|_{E/M} &\leq \|x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \\ &\leq \|x_1 + M\|_{E/M} + \|x_1 + M\|_{E/M} + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

amiből $\varepsilon \to 0$ mellett a bizonyítandó háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk. ■

1.41. Definíció. Ha E normált tér és $M \subseteq E$ egy zárt lineáris altér, akkor az (1.10) formulával értelmezett $\| \cdot \|_{E/M} : E/M \to \mathbb{R}_+$ normát az E/M feletti *faktor normának* nevezzük.

1.42. Állítás. *Legyen E normált tér és legyen $M \subseteq E$ zárt lineáris altér, akkor a*

$$j(x) := x + M, \qquad x \in E$$

faktor leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(a) *j folytonos lineáris, és $\|j\| \leq 1$,*
(b) *j nyílt leképezés, vagyis tetszőleges $U \subseteq E$ nyílt halmaz esetén a $j\langle U \rangle$ képhalmaz nyílt E/M-ben.*

Bizonyítás. (a) A faktornorma értelmezése alapján világos, hogy tetszőleges $x \in E$ vektorra

$$\|j(x)\|_{E/M} = \|x + M\|_{E/M} \leq \|x\|,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $j : E \to E/M$ folytonos és $\|j\| \leq 1$.

(b) Elsőként azt igazoljuk, hogy tetszőleges $x_0 \in E$ vektor és $r > 0$ esetén fennáll a

$$j\langle B_r(x_0) \rangle = B_r(x_0 + M). \tag{1.11}$$

egyenlőség. Valóban, legyen $x \in B_r(x_0)$, azaz $\|x_0 - x\| < r$, ekkor $j(x_0) = x_0 + M$ és $\|j\| \leq 1$ figyelembevételével

$$\|j(x_0) - j(x)\|_{E/M} \leq \|x_0 - x\| < r,$$

vagyis $j(x) \in B_r(x_0 + M)$. Megfordítva legyen $x \in E$ olyan, hogy $x + M \in B_r(x_0 + M)$, azaz $\|x_0 - x + M)\|_{E/M} < r$, akkor a faktornorma értelmezése alapján létezik $y \in M$, hogy $\|x_0 - x - y\| < r$. Ez azt jelenti, hogy $x + y \in B_r(x_0)$, továbbá $j(x) = j(x + y) \in j\langle B_r(x_0) \rangle$, amivel a $B_r(x_0 + M) \subseteq j\langle B_r(x_0) \rangle$ tartalmazást és egyúttal az (1.11) egyenlőséget is igazoltuk.

Ezek után a j leképezés nyíltságát már könnyen igazolhatjuk: legyen ui. $U \subseteq E$ egy tetszőleges nyílt halmaz és legyen $x_0 + M \in j\langle U \rangle$ a $j\langle U \rangle$ képhalmaz egy tetszőleges pontja. Az U halmaz nyíltsága alapján létezik $r > 0$, hogy $B_r(x_0) \subseteq U$, akkor $j\langle B_r(x_0) \rangle \subseteq j\langle U \rangle$, ahol (1.11) szerint $j\langle B_r(x_0) \rangle = B_r(x_0 + M)$, következésképp $B_r(x_0 + M) \subseteq j\langle U \rangle$, amivel igazoltuk, hogy $x_0 + M$ a $j\langle U \rangle$ halmaz belső pontja. ■

1.43. Tétel. *Legyen E Banach-tér és $M \subseteq E$ egy zárt lineáris altér, akkor E/M maga is Banach-tér.*

Bizonyítás. Tegyük fel most, hogy E teljes, azaz Banach-tér, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-beli sorozat, hogy $(x_n + M)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy sorozat E/M-ben. Kiválaszthatunk olyan $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozatot, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|(x_{\sigma(n+1)} + M) - (x_{\sigma(n)} + M)\|_{E/M} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Legyen ezután $y_0 = 0$. Az infimum értelmezése alapján létezik $y_1 \in M$, hogy

$$\|x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(0)} - y_1\| \leq \|x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(0)} + M\| + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Hasonlóan, mivel $x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(1)} + y_1 + M = x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(1)} + M$, így létezik $y_2 \in M$, hogy

$$\|(x_{\sigma(2)} - y_2) - (x_{\sigma(1)} - y_1)\| \leq \|x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(1)} + M\| + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Az eljárást folytatva rekurzióval kapjuk olyan M-ben haladó $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre

$$\begin{aligned}\|(x_{\sigma(n+1)} - y_{n+1}) - (x_{\sigma(n)} - y_n)\| &\leq \|x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)} + M\| + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Jelölje $z_n := x_{\sigma(n)} - y_n$, akkor tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}, m > n$ esetén

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|z_k - z_{k+1}\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k},$$

amiből egyszerűen következik, hogy $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. Az E tér teljessége miatt $z_n \to z$ teljesül valamely $z \in E$ vektorra, ezért a j kanonikus leképezés folytonossága alapján

$$x_{\sigma(n)} + M = j(x_{\sigma(n)}) = j(z_n) \to j(z) = z + M,$$

vagyis az $(x_{\sigma(n)} + M)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Metrikus térben egy sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy tulajdonságú és létezik konvergens részsorozata, következésképp $(x_n + M)_{n\in\mathbb{N}}$ maga is konvergens, amivel megmutattuk, hogy E/M Banach-tér. ■

1.44. Állítás. *Legyen E és F normált tér és legyen $A \in \mathscr{B}(E; F)$. Ekkor az alábbi*

$$A_0(x + \ker A) := Ax$$

egyenlőséggel értelmezett $A_0 : E/\ker A \to F$ leképezés olyan injektív folytonos lineáris operátor, amelyre $\|A_0\| = \|A\|$ és $A = A_0 \circ j$ teljesül, ahol j jelöli az $E \to E/\ker A$ kanonikus szürjekciót:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "j"'] & & F \\ & E/\ker A \arrow[ur, "A_0"'] & \end{tikzcd}$$

Ezt az A_0 operátort nevezzük az A kanonikus faktorizáltjának.

Bizonyítás. Az A_0 leképezés jóldefiniált, ugyanis tetszőleges $E \ni x, y$ esetén $x + \ker A = y + \ker A$ pontosan akkor teljesül, ha $x - y \in \ker A$, azaz $Ax = Ay$. Ez az észrevétel egyúttal az A_0 függvény injektivitását is mutatja. Az is nyilvánvaló továbbá, hogy A_0 lineáris operátor, amelyre $A = A_0 \circ j$ teljesül. Az A_0 operátor folytonosságának igazolásához legyen $x \in E$, ekkor tetszőleges $\ker A \ni z$-re

$$\|Ax\| = \|A(x - z)\| \leq \|A\|\|x - z\|,$$

amiből z-ben infimumot véve kapjuk, hogy

$$\|A_0(x + \ker A)\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x + \ker A\|_{E/\ker A},$$

vagyis A_0 korlátos és $\|A_0\| \leq \|A\|$. Másfelől $\|A\| = \|A_0 \circ j\| \leq \|A_0\|\|j\| \leq \|A_0\|$ is teljesül, vagyis valóban $\|A\| = \|A_0\|$. ■

1.7. A Mazur–Ulam-tétel

1.45. Definíció. Legyenek E és F *valós* vektorterek, akkor egy $f : E \to F$ függvényt *affin függvénynek* nevezünk, ha minden $t \in [0, 1]$ számra és $x, y \in E$ vektorra

$$f(tx + (1 - t)y) = tf(x) + (1 - t)f(y).$$

A következő állítás az affin függvények szerkezetét írja le:

1.46. Állítás. *Legyenek E és F valós vektorterek. Egy $f : E \to F$ függvény pontosan akkor affin, ha létezik olyan $T : E \to F$ lineáris operátor és $b \in F$ vektor, hogy bármely $x \in E$ mellett $f(x) = Tx + b$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f előáll $f(x) = Tx + b, (x \in E)$ alakban, ahol $T : E \to F$ lineáris operátor, és $b \in F$. Ekkor bármely $t \in [0, 1]$ mellett

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &= T(tx + (1 - t)y) + b \\ &= t(Tx + b) + (1 - t)(Ty + b) \\ &= tf(x) + (1 - t)f(y), \end{aligned}$$

vagyis f affin függvény. Megfordítva tegyük fel, hogy f affin függvény, és vezessük be a

$$T(x) := f(x) - f(0), \qquad (x \in E)$$

egyenlőséggel értelmezett $T : E \to F$ függvényt. Világos, hogy minden $x \in E$ esetén $f(x) = T(x) + f(0)$, emiatt elegendő azt igazolni, hogy T lineáris operátor. Először vegyük észre, hogy T is affin függvény és $T(0) = 0$, emiatt bármely $\alpha \in [0, 1]$ számra és $x \in E$ vektorra

$$T(\alpha x) = T(\alpha x + (1 - \alpha)0) = \alpha T(x) + (1 - \alpha)T(0) = \alpha T(x),$$

vagyis $T(\alpha x) = \alpha T(x)$. Első lépésben megmutatjuk, hogy T additív. Legyenek ugyanis $x, y \in E$ tetszőleges vektorok, akkor a fenti egyenlőséget $\alpha = \frac{1}{2}$-re alkalmazva a T függvény affinságát kihasználva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}T(x + y) = T\Big(\frac{x + y}{2}\Big) = \frac{1}{2}T(x) + \frac{1}{2}T(y),$$

amiből következik, hogy $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Ebből teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $x \in E$ vektorra és $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$T(nx) = nT(x).$$

A T leképezés homogenitásának igazolásához legyen először $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$, akkor λ előáll $\lambda = n + \alpha$ alakban, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in [0,1]$, ezért a fentiek figyelembevételével

$$T(\lambda x) = T(nx + \alpha x) = T(nx) + T(\alpha x) = nT(x) + \alpha T(x) = \lambda T(x).$$

Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $-\lambda > 0$, ezért

$$T(\lambda x) = T((-\lambda)(-x)) = -\lambda T(-x),$$

ahol $0 = T(x + (-x)) = T(x) + T(-x)$ miatt $T(-x) = -T(x)$, vagyis $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. Ezzel megmutattuk, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $T(\lambda x) = \lambda Tx$, amivel a T függvény homogenitását és egyúttal az állítást is igazoltuk. ∎

1.47. Állítás. *Legyenek E és F valós normált terek, akkor egy $f : E \to F$ folytonos függvény pontosan akkor affin, ha minden $x, y \in E$ vektorokra*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Bizonyítás. Az f folytonossága miatt elegendő azt igazolni, hogy

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$$

teljesül minden $x, y \in E$ vektorra és minden $t \in [0,1]$ diadikus számra, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra és $k, l \in \mathbb{N}$, $k + l = 2^n$ esetén

$$f\Big(\frac{kx+ly}{2^n}\Big) = \frac{k}{2^n}f(x) + \frac{l}{2^n}f(y). \tag{1.12}$$

Ennek igazolását teljes indukcióval hajtjuk végre. Ha $n = 1$, akkor a (1.12) egyenlőség éppen a függvényre tett feltétel. Tegyük fel tehát, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén a (1.12) egyenlőség minden $k, l \in \mathbb{N}$, $k + l = 2^n$ esetén fennáll. Legyen ezután $k, l \in \mathbb{N}$, hogy $k + l = 2^{n+1}$. Ha k (és ennek következtében l is) páros, akkor létezik $i, j \in \mathbb{N}$, hogy $k = 2i$ és $l = 2j$, ekkor $j + i = 2^n$, és ezért az indukciós hipotézis szerint

$$f\Big(\frac{kx+ly}{2^{n+1}}\Big) = f\Big(\frac{ix+jy}{2^n}\Big) = \frac{i}{2^n}f(x) + \frac{j}{2^n}f(y) = \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \frac{l}{2^{n+1}}f(y).$$

Tegyük fel, hogy k és l mindketten páratlan számok, és legyenek $i, j \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $2i + 1 = k$ és $2j - 1 = l$. Alkalmazzuk az f-re vonatkozó feltételt az

$$u := \frac{ix+jy}{2^n} \qquad \text{és} \qquad v := \frac{(i+1)x + (j-1)y}{2^n}$$

vektorokra, akkor

$$f\Big(\frac{kx+ly}{2^{n+1}}\Big) = f\Big(\frac{u+v}{2}\Big) = \frac{f(u)+f(v)}{2}. \tag{1.13}$$

Másrészt pedig $i + j = (i+1) + (j-1) = 2^n$ miatt az indukciós hipotézist alkalmazva

$$f(u) = \frac{i}{2^n}f(x) + \frac{j}{2^n}f(y), \qquad f(v) = \frac{i+1}{2^n}f(x) + \frac{j-1}{2^n}f(y).$$

Ennek, és (1.13) figyelembevételével nyerjük, hogy

$$f\Big(\frac{kx+ly}{2^{n+1}}\Big)=\frac{2i+1}{2^{n+1}}f(x)+\frac{2j-1}{2^{n+1}}f(y)=\frac{k}{2^{n+1}}f(x)+\frac{l}{2^{n+1}}f(y),$$

amivel az indukciós állítást $(n+1)$-re is beláttuk. ∎

1.48. Definíció. Legyen E vektortér és tetszőleges $z\in E$ rögzített vektor, akkor a

$$T_z(x):=2z-x,\qquad (x\in E)$$

egyenlőséggel értelmezett $T_z : E\to E$ függvényt a z vektorra való *középpontos tükrözésnek* nevezzük.

A következő állításban összefoglaljuk a középpontos tükrözések néhány alapvető tulajdonságát, amelyeket felhasználunk majd a Mazur–Ulam-tétel bizonyításában:

1.49. Állítás. *Legyen E vektortér és $z\in E$ egy tetszőleges vektor. Ekkor*

(a) $T_z\circ T_z=I$, *ahol I jelöli az $E\to E$ identikus operátort,*
(b) *bármely $x,y\in E$ vektorok esetén $T_z(x)-T_z(y)=y-x$,*
(c) *bármely $x\in E$ vektor esetén $T_z(x)-x=2(z-x)$, vagyis z a T_z leképezés egyetlen fixpontja,*
(d) *Ha $a,b\in E$ tetszőleges vektorok, hogy $z=\frac{a+b}{2}$, akkor $T_z(a)=b$ és $T_z(b)=a$.*

Valamennyi állítás egyszerű számolás, így azok ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

1.50. Mazur–Ulam-tétel. *Legyenek E és F valós normált terek és $f : E\to F$ bijektív izometria, akkor f affin függvény, vagyis f előáll*

$$f(x)=Tx+b,\qquad (x\in E)$$

alakban valamely $T : E\to F$ izometrikus izomorfizmus és $b\in F$ vektor mellett.

Bizonyítás. Az 1.47 Állítás szerint elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges $x,y\in E$ vektorok esetén

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Rögzítsük tehát az $x,y\in E$ vektorokat és jelölje $z:=\frac{x+y}{2}$. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges olyan $g : E\to E$ izometrikus bijekcióra, amelyre $g(x)=x$ és $g(y)=y$, egyúttal $g(z)=z$ is teljesül. Ennek igazolásához vezessük be a

$$G:=\{g : E\to E\,|\,g \text{ izometrikus bijekció, } g(x)=x, \text{ és } g(y)=y\},$$

halmazt és jelölje $\alpha:=\sup\limits_{g\in G}\|g(z)-z\|$. Világos, hogy $I\in G$, ahol I jelöli az $E\to E$ identikus leképezést. Másrészt $\alpha<+\infty$, hiszen bármely $g\in G$ esetén

$$\|g(z)-x\|=\|g(z)-g(x)\|=\|z-x\|,$$

ezért $\|g(z)-z\|\le\|g(z)-x\|+\|x-z\|\le 2\|z-x\|$, amiből $\alpha\le\|z-x\|$ következik. Jelölje T_z a z vektorra való középpontos tükrözést, akkor az 1.49 Álliás szerint T_z izometria és $T_z(x)=y$, illetve $T_z(y)=x$. Emiatt bármely $g\in G$ esetén

$$g^*:=T_z\circ g^{-1}\circ T_z\circ g$$

választással $g^* \in G$, ui. g^* nyilvánvalóan izometrikus bijekció, és könnyen ellenőrizhető, hogy $g^*(x) = x$, illetve $g^*(y) = y$. Emiatt $\|g^*(z) - z\| \leq \alpha$, következésképp a T_z, g^{-1} függvények izometrikusságát rendre kihasználva

$$\begin{aligned}\alpha &\geq \|g^*(z) - z\| = \|(T_z \circ g^{-1} \circ T_z \circ g)(z) - T_z(z)\| \\ &= \|(g^{-1} \circ T_z \circ g)(z) - z\| = \|(g^{-1} \circ T_z \circ g)(z) - (g^{-1} \circ g)(z)\| \\ &= \|T_z(g(z)) - g(z)\| = 2\|z - g(z)\|,\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az 1.49 Állítás (c) pontját alkalmaztuk. Ezzel megmutattuk, hogy $\|z - g(z)\| \leq \frac{\alpha}{2}$ teljesül valamennyi $g \in G$ mellett, így g-ben szuprémumot véve $2\alpha \leq \alpha$ adódik, vagyis $\alpha = 0$, ami azt jelenti, hogy $g(z) = z$ teljesül minden $G \ni g$-re.

Megmutatjuk, hogy az $f : E \to F$ izometrikus bijekcióra $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ teljesül. Ehhez $z' := \frac{f(x)+f(y)}{2} \in F$ választás mellett tekintsük a $T_{z'}$ z'-re való középpontos tükrözést. Mivel fennállnak a $T_{z'}(f(x)) = f(y)$, illetve $T_{z'}(f(y)) = f(x)$ azonosságok, azért könnyen ellenőrizhető, hogy $g := T_z \circ f^{-1} \circ T_{z'} \circ f$ olyan $E \to E$ izometrikus bijekció, amelyre $g(x) = x$ és $g(y) = y$, vagyis $g \in G$. A fentiek szerint $g(z) = z$ is teljesül, ezért a $T_z^{-1}(z) = T_z(z) = z$ azonosságot felhasználva

$$T_{z'}(f(z)) = f(T_z(z)) = f(z),$$

ami azt jelenti, hogy $f(z)$ fixpontja a $T_{z'}$ függvénynek. Ugyanakkor az 1.49 Állítás (c) pontja szerint z' a $T_{z'}$ leképezés egyetlen fixpontja, azaz $z' = f(z)$, ami éppen azt jelenti, hogy $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, amivel beláttuk, hogy f affin függvény. ■

Megjegyezzük, hogy a Mazur–Ulam-tétel nem érvényes komplex normált terekben, ui. $E = F = \mathbb{C}$ választások mellett az $f(z) := \overline{z}$, $(z \in \mathbb{C})$ függvény izometrikus bijekció, azonban nem állítható elő egy lineáris leképezés és egy eltolás kompozíciójaként. Hasonlóan az f függvény szürjektivitása sem hagyható el: ha ui. $E = \mathbb{R}$ az abszolútértékkel, $F = \mathbb{R}^2$ pedig a maximum normával ellátott terek, úgy az $f(x) := (x, |x|)$, $(x \in \mathbb{R})$ leképezés izometria, de nem affin leképezés. Léteznek azonban olyan normált terek (ilyenek pl. a szigorúan konvex Banach-terek), amelyek esetében az f-re előírt feltételrendszer gyengíthető.

2. FEJEZET

Klasszikus sorozat- és függvényterek

Ebben a fejezetben áttekintjük a gyakorlatban leggyakrabban előforduló normált, illetve Banach-tereket.

2.1. A $\mathbb{K}^n$ terek

Az alábbiakban legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ rögzített szám és tekintsük a $\mathbb{K}^n$ teret, vagyis az n-dimenziós valós $\mathbb{R}^n$, illetve a komplex $\mathbb{C}^n$ vektorteret. Emlékeztetünk rá, hogy egy $x \in \mathbb{K}^n$ vektor euklideszi abszolútértékén az

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

számot értjük. Az ún. elemi Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség segítségével nem nehéz belátni, hogy a fenti egyenlőséggel definiált $\|\cdot\|_2 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ leképezés norma. Ezt a normát nevezzük a $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett *euklideszi normának.*

Az alábbiakban tetszőleges $1 \leq p \leq +\infty$ szám mellett az euklideszi normához hasonló módon definiálni fogjuk az ún. p-normát. Tetszőleges $p \geq 1$ valós szám mellett tekintsük az $\mathbb{K}^n$ vetkortér felett az alábbi

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \qquad x \in \mathbb{K}^n$$

illetve $p = +\infty$ esetén az

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \qquad x \in \mathbb{K}^n$$

egyenlőséggel értelmezett leképezéseket. Megmutatjuk, hogy bármely rögzített $p \in [1, +\infty]$ mellett $\|\cdot\|_p$ norma $\mathbb{K}^n$ felett. Ehhez azonban előbb igazoljuk az alábbi, önmagában is érdekes lemmát:

2.1. Lemma. *Legyen E vektortér és $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, amely abszolút homogén, és amelyre $\|x\| = 0$ pontosan akkor igaz, ha $x = 0$ (vagyis $\|\cdot\|$ teljesíti a normák 1.1 Definíciójának (a) és (b) követelményeit). A $\|\cdot\|$ függvény pontosan akkor norma E felett, ha a*

$$B := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$$

„egységgömb" konvex halmaz.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a B halmaz konvex, azt kell igazolnunk, hogy a $\|\cdot\|$ függvény teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Ehhez legyenek $x, y \in E$ tetszőleges vektorok (feltehető, hogy az x és y vektorok egyike sem a null-vektor, ellenkező esetben a háromszög-egyenlőtlenség triviálisan igaz). Ekkor az $u = \frac{x}{\|x\|}$ és $v = \frac{y}{\|y\|}$ vektorokra fennáll, hogy

$u, v \in B$, ezért $\alpha = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$ és $\beta = \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}$ választással és $\alpha + \beta = 1$ figyelembevételével $\alpha u + \beta v \in B$, vagyis

$$\|\alpha u + \beta v\| \leq 1,$$

amit $(\|x\| + \|y\|)$-val megszorozva éppen a bizonyítandó $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk. Ezzel beláttuk, hogy a $\|\cdot\|$ függvény norma.

A Lemma fordított irányú következtetése nyilvánvaló, ui. könnyen igazolható, hogy normált térben minden gömb konvex. ∎

2.2. Tétel. *Tetszőleges* $1 \leq p \leq +\infty$ *esetén a* $\|\cdot\|_p$ *függvény norma* $\mathbb{K}^n$ *felett.*

Bizonyítás. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a $\|\cdot\|_\infty$ függvény norma, ezért feltesszük, hogy $1 \leq p < +\infty$. Nyilvánvaló, hogy a $\|\cdot\|_p$ függvény eleget tesz az 1.1 Definíció (a) és (b) kritériumainak, ezért az előző állítás értelmében elegendő azt megmutatnunk, hogy a $B := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_p \leq 1\}$ halmaz konvex. Ehhez pedig azt kell belátnunk, hogy adott $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ és $x, y \in B$ (vagyis $\|x\|_p^p \leq 1, \|y\|_p^p \leq 1$) esetén $\alpha x + \beta y \in B$, azaz

$$\|\alpha x + \beta y\|_p^p \leq 1. \tag{2.1}$$

Ismeretes, hogy az $f(t) = t^p, (t \in \mathbb{R}_+)$ egyenlőséggel definiált $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvény konvex, ezért bármely $s, t \in \mathbb{R}_+$ számokra fennáll, hogy $(\alpha t + \beta s)^p \leq \alpha t^p + \beta s^p$, következésképp bármely $i = 1, \ldots, n$ index esetén is

$$|\alpha x_i + \beta y_i|^p \leq \Big[\alpha|x_i| + \beta|y_i|\Big]^p \leq \alpha|x_i|^p + \beta|y_i|^p,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n |\alpha x_i + \beta y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n \alpha|x_i|^p + \sum_{i=1}^n \beta|y_i|^p = \alpha\|x\|_p^p + \beta\|y\|_p^p \leq \alpha + \beta = 1,$$

ami éppen a bizonyítandó (2.1) egyenlőtlenség. ∎

2.3. Definíció. A fenti módon definiált $\|\cdot\|_p$ normákat $\mathbb{K}^n$ feletti *p-normáknak* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben igazolt háromszög-egyenlőtlenséget, vagyis a

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}, \qquad x, y \in \mathbb{K}^n, 1 \leq p < +\infty$$

összefüggést szokás *Hölder–Minkowski-egyenlőtlenségnek* is nevezni. A Hölder–Minkowski-egyenlőtlenségnek másik (némileg több számolást igénylő) bizonyítása adható az alábbi *Hölder-egyenlőtlenség* segítségével, amely jól ismert az elemi analízisből:

2.4. Hölder-egyenlőtlenség. *Legyen* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ *természetes szám, és legyenek* $p, q \geq 1$ *olyan valós számok, hogy* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, ekkor tetszőleges* x *és* $y \in \mathbb{K}^n$ *vektorok esetén*

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Korábban láttuk, hogy egy véges dimenziós vektortér bármely normával ellátva teljes, azaz Banach-tér. Ennek egy speciális következménye az alábbi

2.5. Tétel. $\mathbb{K}^n$ *tetszőleges* $\|\cdot\|_p$ *normával ellátva Banach-tér.*

2.2. Az $\ell^p_{\mathbb{K}}$ sorozatterek

Ebben a fejezetben bevezetjük a legfontosabb sorozattér fogalmat, az ún. $\ell^p_{\mathbb{K}}$ tereket. Legyen $p \geq 1$ valós szám és jelölje $\ell^p_{\mathbb{K}}$ az összes olyan $\mathbb{K}$-ban haladó $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok halmazát, amelyekre a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p$ sor konvergens, vagyis amelyre a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ összeg véges, továbbá $p = +\infty$ esetén jelölje $\ell^\infty_{\mathbb{K}}$ az összes $\mathbb{K}$-ban haladó korlátos sorozatok halmazát.

2.6. Állítás. *Bármely $1 \leq p \leq +\infty$ esetén $\ell^p_{\mathbb{K}}$ vektortér $\mathbb{K}$ feletti vektortér.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely $\ell^p_{\mathbb{K}}$-beli sorozat tetszőleges skalárszorosa is $\ell^p_{\mathbb{K}}$-beli sorozat, vagyis $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda x \in \ell^p_{\mathbb{K}}$. Kevésbé nyilvánvaló, azonban, hogy két $\ell^p_{\mathbb{K}}$-beli sorozat összege is $\ell^p_{\mathbb{K}}$-beli sorozat. Ennek igazolásához tegyük fel először, hogy $1 \leq p < +\infty$ és tekintsük az $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(t) := t^p$ függvényt, akkor az f konvexitásából kapjuk, hogy

$$\left(\frac{s+t}{2}\right)^p = f\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{f(s)+f(t)}{2} = \frac{s^p+t^p}{2}, \qquad s,t \in \mathbb{R}_+,$$

vagyis $(s+t)^p \leq 2^{p-1}(s^p + t^p)$. Ha most $x, y \in \ell^p_{\mathbb{K}}$ tetszőleges sorozatok, akkor bármely $\mathbb{N} \ni n$-re

$$|x_n + y_n|^p \leq (|x_n| + |y_n|)^p \leq 2^{p-1}(|x_n|^p + |y_n|^p),$$

amiből nyilvánvaló, hogy $x + y \in \ell^p_{\mathbb{K}}$. Ha pedig $p = +\infty$, akkor az állítás triviális. ■

Értelmezzük ezek után az $\ell^p_{\mathbb{K}}$ vektortéren a $\|\cdot\|_p$ függvényt $1 \leq p < +\infty$ esetén az

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}, \qquad x \in \ell^p_{\mathbb{K}},$$

illetve $p = +\infty$ esetén az

$$\|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \qquad x \in \ell^\infty_{\mathbb{K}}$$

hozzárendeléssel.

2.7. Állítás. *Bármely $1 \leq p \leq +\infty$ esetén a $\|\cdot\|_p$ függvény norma $\ell^p_{\mathbb{K}}$ felett.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}$ esetén az $\|x\|_p = 0$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x_n = 0$ teljesül valemennyi n-re, azaz ha $x = 0$. Az is könnyen igazolható továbbá, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$ teljesül, vagyis a $\|\cdot\|_p$ függvény abszolút homogén. Emiatt csupán azt kell belátnunk, hogy $\|\cdot\|_p$ teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Ehhez legyen $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}$ és $y \in \ell^p_{\mathbb{K}}$, azt kell megmutatnunk, hogy

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{2.2}$$

Tegyük fel először, hogy $1 \leq p < +\infty$ és rögzítsünk egy $n \in \mathbb{N}$ természetes számot, ekkor a már igazolt $\mathbb{K}^n$-beli p-normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

amiből már (2.2) következik.

Tegyük fel végül, hogy $p = +\infty$, és legyenek x és $y \in \ell^\infty_{\mathbb{K}}$, akkor

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n + y_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(|x_n| + |y_n|\Big) \le \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

amivel a $\|\cdot\|_\infty$-ra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget is igazoltuk. Ezzel megmutattuk tehát, hogy tetszőleges $1 \le p \le +\infty$ esetén $\|\cdot\|_p$ norma az $\ell^p_{\mathbb{K}}$ vektortér felett. ∎

2.8. Definíció. A fentiekben definiált $\|\cdot\|_p$ normát (ahol $1 \le p \le +\infty$) az $\ell^p_{\mathbb{K}}$ sorozattér feletti *p-normának* nevezzük.

A következőkben gyakran lesz szükségünk $\ell^p_{\mathbb{K}}$-ben – és általában valamilyen sorozattérben – haladó sorozatokra, emiatt szükséges néhány megjegyzést tenni a jelölésrendszerrel valamint az elnevezésekkel kapcsolatban. A továbbiakban az a kijelentés, hogy „$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\ell^p_{\mathbb{K}}$-ben haladó sorozat” azt jelenti, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden tagja egy $\ell^p_{\mathbb{K}}$-beli elem, vagyis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az az $\mathbb{N} \to \ell^p_{\mathbb{K}}$ függvény, amely minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz az $x_n \in \ell^p_{\mathbb{K}}$ vektort rendeli. Másfelől, ha $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}$ – azaz x egy $\mathbb{K}$-ban haladó p-edik hatványon szummálható sorozat – és $k \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges természetes szám, akkor e sorozat k-adik tagját $x(k) \in \mathbb{K}$ jelöli.

2.9. Tétel. *Bármely $1 \le p \le +\infty$ mellett az $\ell^p_{\mathbb{K}}$ a p-normával ellátva teljes, azaz Banach-tér.*

Bizonyítás. a) Tegyük fel elsőként, hogy $1 \le p < \infty$ és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\ell^p_{\mathbb{K}}$-ben haladó Cauchy-tulajdonságú sorozat, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}, n, m \ge N$ esetén $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges rögzített index, ekkor bármely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x_n(k) - x_m(k)| \le \left(\sum_{j=0}^{\infty}|x_n(j) - x_m(j)|^p\right)^{1/p} = \|x_n - x_m\|_p,$$

amiből kapjuk, hogy az $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$-ban haladó sorozat Cauchy-sorozat, így $\mathbb{K}$ teljessége miatt konvergens is. Vezessük be az

$$x(k) := \lim_{n\to\infty} x_n(k), \qquad k \in \mathbb{N}$$

egyenlőséggel értelmezett $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot.

Megmutatjuk, hogy $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}$ és $\|x_n - x\|_p \to 0$. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és válasszunk ehhez olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbindexet, hogy bármely $n, m \ge N$ indexek esetén

$$\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon.$$

Ebből egyrészt $m := N$ választással $\|x_n\|_p \le \|x_N\|_p + \varepsilon$, ezért tetszőleges $M \in \mathbb{N}$ mellett

$$\sum_{k=0}^{M}|x(k)|^p = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{M}|x_n(k)|^p \le \limsup_{n\to\infty}\|x_n\|_p^p \le (\|x_N\|_p + \varepsilon)^p,$$

amiből már következik, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}}|x(k)|^p$ sor konvergens, azaz $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}$. Másrészt bármely rögzített $n, m \ge N$ és tetszőleges $M \in \mathbb{N}$ index esetén

$$\left(\sum_{k=0}^{M}|x_n(k) - x_m(k)|^p\right)^{1/p} \le \|x_n - x_m\|_p \le \varepsilon,$$

ezért rögzített $m \geq N$ és $M \in \mathbb{N}$ mellett

$$\left(\sum_{k=0}^{M} |x(k) - x_m(k)|^p\right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{M} |x_n(k) - x_m(k)|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

amiből

$$\|x - x_m\|_p = \sup_{M\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{M} |x(k) - x_m(k)|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}$ vektorhoz konvergál, vagyis beláttuk, hogy $1 \leq p < +\infty$ esetén $\ell^p_{\mathbb{K}}$ Banach-tér.
b) Legyen most $p = +\infty$ és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\ell^\infty_{\mathbb{K}}$ térben haladó Cauchy-sorozat. A fentiekhez hasonló módon igazolható, hogy tetszőleges rögzített $k \in \mathbb{N}$ mellett az $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$-beli sorozat konvergens. Vezessük be az

$$x(k) := \lim_{n\to\infty} x_n(k), \qquad k \in \mathbb{N}$$

egyenlőséggel értelmezett $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatot. Megmutatjuk, hogy $x \in \ell^\infty_{\mathbb{K}}$ (azaz x korlátos sorozat) és $\|x_n - x\|_\infty \to 0$. Legyen tehát $\varepsilon > 0$ tetszőleges és válasszunk ehhez olyan $N := N(\varepsilon)$ olyan küszöbindexet, hogy bármely $n, m \geq N$ indexek esetén

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Ebből egyrészt $m := N$ választással $\|x_n\|_\infty \leq \|x_N\|_\infty + \varepsilon$, ezért tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x(k)| = \lim_{n\to\infty} |x_n(k)| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_\infty \leq \|x_N\|_\infty + \varepsilon,$$

amiből $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x(k)| < +\infty$, vagyis $x \in \ell^\infty_{\mathbb{K}}$. Másrészt rögzített $m \geq N$ és $k \in \mathbb{N}$ indexek esetén

$$|x(k) - x_m(k)| = \lim_{n\to\infty} |x_n(k) - x_m(k)| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

vagyis

$$\|x - x_m\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k) - x_m(k)| \leq \varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az $x \in \ell^\infty_{\mathbb{K}}$ vektorhoz konvergál, vagyis beláttuk, hogy $\ell^\infty_{\mathbb{K}}$ Banach-tér. ■

2.3. A folytonos függvények tere

Legyen K egy kompakt Hausdorff-tér, és jelölje $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ a K-n értelmezett $\mathbb{K}$ értékű folytonos függvények halmazát, vagyis

$$\mathscr{C}(K;\mathbb{K}) := \{f : K \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ folytonos}\}.$$

Ekkor $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ vektortér a pontonkénti műveletekre nézve, továbbá a Weierstrass-féle maximum-minimum elv szerint bármely $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ esetén létezik és véges az

$$|||f||| := \sup_K |f| = \max_K |f| \tag{2.3}$$

érték.

2.10. Állítás. *A fenti* (2.3) *egyenlőséggel értelmezett* $|||\cdot||| : \mathscr{C}(K;\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ *függvény norma* $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ *felett.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy bármely $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ esetén $|||f||| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f(x) = 0$ minden $K \ni x$-re, vagyis ha $f = 0$. Az abszolút homogenitás igazolásához legyen $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ valamint $\lambda \in \mathbb{K}$, ekkor

$$|||\lambda f||| = \sup_{x\in K}|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x\in K}|f(x)| = |\lambda| \cdot |||f|||,$$

vagyis $|||\lambda f||| = |\lambda| \cdot |||f|||$. Végül a háromszög-egyenlőtlenség igazolásához legyenek $f, g \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ tetszőleges folytonos függvények, ekkor

$$\begin{aligned} |||f+g||| = \sup_{x\in K}|f(x)+g(x)| &\le \sup_{x\in K}(|f(x)|+|g(x)|) \\ &\le \sup_{x\in K}|f(x)| + \sup_{y\in K}|g(y)| = |||f||| + |||g|||, \end{aligned}$$

vagyis $|||f+g||| \le |||f||| + |||g|||$. Ezzel igazoltuk, hogy a $|||\cdot|||$ valóban norma a $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ vektortéren. ∎

2.11. Állítás. *Legyen K kompakt Hausdorff-tér, akkor egy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folytonos függvényekből álló $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$-ban haladó sorozat pontosan akkor konvergál valemely $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ függvényhez a $|||\cdot|||$ normára nézve, ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál f-hez a K halmazon.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló a $|||\cdot|||$ norma értelmezéséből, ui. egy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor tart egyenletesen egy f függvényhez a K halmazon, ha $\sup_K|f_n - f| \to 0$, vagyis $|||f - f_n||| \to 0$. ∎

Az alábbi eredmény tiszázza a $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ tér teljességét.

2.12. Tétel. *Legyen K kompakt Hausdorff-tér, akkor a $(\mathscr{C}(K;\mathbb{K}), |||\cdot|||)$ normált tér teljes, vagyis Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$-beli függvényekből álló olyan sorozat, amely Cauchy-tulajdonságú sorozat a $|||\cdot|||$ normára nézve. Azt kell igazolni, hogy létezik olyan $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ függvény, amelyre $|||f_n - f||| \to 0$ teljesül. Ehhez rögzítsünk először egy $x \in K$ pontot, és vegyük észre, hogy az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozat szintén Cauchy-tulajdonságú sorozat. Valóban, tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ indexek esetén fennáll az

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |||f_n - f_m|||$$

egyenlőtlenség, amiből már egyszerűen következik, hogy az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat rendelkezik a Cauchy-tulajdonsággal. A $\mathbb{K}$ tér teljessége alapján az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{K}$-ban, amivel igazoltuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens a K halmazon. Jelölje f e függvénysorozat pontonkénti limesz-függvényét, vagyis értelmezzük f-et az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in K$$

egyenlőséggel. Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen is tart az f függvényhez. Legyen ehhez $\varepsilon > 0$ tetszőleges és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat Cauchy-tulajdonságának megfelelően válasszunk olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, amely mellett bármely $n, m \ge N$ indexek esetén $|||f_n - f_m||| < \varepsilon$ teljesül. Legyen ismét $x \in K$ egy tetszőleges pont, ekkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén, $n \to \infty$ mellett $f_n(x) - f_m(x) \to f(x) - f_m(x)$, ezért bármely $m \ge N$ esetén

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty}|f_n(x) - f_m(x)| \le \limsup_{n\to\infty} |||f_n - f_m||| \le \varepsilon.$$

A fenti becslés bármely $m \geq N$ és $x \in K$ esetén fennáll, ezért $m \geq N$ esetén fennáll a

$$\sup_{x\in K} |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

becslés is. Ezzel igazoltuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa folytonos függvényekből álló sorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez a K-halmazon. Jól ismert, hogy folytonos függvények egyenletes limesz-függvénye is folytonos függvény, következésképp kapjuk, hogy az f függvény is folytonos, vagyis $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$. A 2.11 Állítás szerint $|||f_n - f||| \to 0$, amivel megmutattuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. ■

2.13. Megjegyzés. A fenti $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ terek általánosítását kapjuk az alábbi módon. Legyen K kompakt Hausdorff-tér és E egy normált tér, és tekintsük a K-n értelmezett E értékű folytonos függvények $\mathscr{C}(K;E)$ halmazát, vagyis

$$\mathscr{C}(K;E) := \{f : K \to E \mid f \text{ folytonos}\}.$$

Könnyen igazolható, hogy az alábbi

$$|||f||| := \sup_{x\in K} \|f(x)\|, \qquad f \in \mathscr{C}(K;E)$$

egyenlőséggel értelmezett $|||\cdot||| : \mathscr{C}(K;E) \to \mathbb{R}_+$ függvény norma $\mathscr{C}(K;E)$ felett, emellett a 2.12 Tétel bizonyításának gondolatmenetét követve igazolható, hogy ha E Banach tér, akkor $\mathscr{C}(K;E)$ szintén Banach-tér.

2.4. Az $L^p(\mu)$ függvényterek

Ebben a fejezetben végig legyen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ egy mértéktér, vagyis X egy tetszőleges nemüres halmaz, $\mathscr{A}$ az X halmazon értelmezett σ-algebra és μ az $\mathscr{A}$ σ-algebrán értelmezett nemnegatív (nem feltétlenül véges) mérték. Emlékeztetünk rá, hogy egy $f : X \to \mathbb{K}$ függvényt mérhetőnek nevezünk, ha tetszőleges $A \subseteq \mathbb{K}$ Lebesgue-mérhető halmaz f-szerinti ősképe $\mathscr{A}$-ban van, vagyis $\overset{-1}{f}\langle A\rangle \in \mathscr{A}$. Emlékeztetünk továbbá $1 \leq p < +\infty$ esetén a p-edik hatványon integrálható függvények $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathscr{A}, \mu)$ terek értelmezésére. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to \mathbb{K}$ függvény p-edik hatványon integrálható (vagy röviden $\mathscr{L}^p$-beli) függvény, ha mérhető, és az $|f|^p$ függvény X halmazon vett μ-integrálja véges, vagyis

$$\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty.$$

Jelölje $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ a p-edik hatványon integrálható függvények halmazát:

$$\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ mérhető és } \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Másfelől, $p = +\infty$ esetén jelölje $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ azon $f : X \to \mathbb{K}$ mérhető függvények halmazát, amelyek egy μ-nulla mértékű halmaztól eltekintve korlátosak, vagyis

$$\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ mérhető és létezik } A \in \mathscr{A}, \mu(A) = 0, \sup_{X\setminus A} |f| < +\infty \right\}.$$

Ismeretes, hogy bármely $1 \leq p \leq +\infty$ esetén $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. Az integrál elemi tulajdonságait és a Hölder-egyenlőtlenséget felhasználva nem nehéz belátni, hogy

$1 \le p < +\infty$ esetén az

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \qquad f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu),$$

egyenlőséggel értelmezett $\| \cdot \|_p : \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{R}_+$ függvény, míg $p := +\infty$ esetén az

$$\|f\|_\infty := \inf_{\substack{A \in \mathscr{A}, \\ \mu(A)=0}} \sup_{X \setminus A} |f| = \min\Big\{ K \ge 0 \,\Big|\, |f| \le K \ \mu\text{-m.m.} \Big\}, \qquad f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$$

egyenlőséggel értelmezett függvény $\|\cdot\|_\infty : \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{R}_+$ függvény *félnorma*, vagyis bármely $1 \le p \le +\infty$ esetén $\| \cdot \|_p$ abszolút homogén és teljesül rá a háromszög-egyenlőtlenség. Azonban létezhet olyan $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ nem-nulla függvény, amelyre $\|f\|_p = 0$.

Vezessük be emiatt a következő ekvivalencia-relációt $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ felett: két $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-beli függvényt ekvivalensnek nevezünk, ha azok μ-majdnem mindenütt megegyeznek. Könnyen igazolható, hogy ez valóban ekvivalencia-reláció $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ felett. Jelölje $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ az $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ térnek a most bevezetett ekvivalencia-reláció szerinti faktorizáltját, vagyis $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ elemei olyan ekvivalencia-osztályok, amelyek elemei μ-majdnem mindenütt azonos $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-beli függvények. Egy $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ függvény megfelelő ekvivalencia-osztályát az $[f]$ szimbólummal jelölve nem nehéz megmutatni, hogy

$$[f] = [0] \qquad \Leftrightarrow \qquad \|f\|_p = 0,$$

illetve az alábbi

$$[f] + [g] := [f + g], \qquad \lambda[f] := [\lambda f], \qquad (f, g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), \lambda \in \mathbb{K})$$

összeadással és skalárral való szorzással $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ vektortér. Emiatt könnyen igazolható az alábbi

2.14. Állítás. *Legyen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ mértéktér, akkor az alábbi*

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \qquad f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$$

egyenlőséggel értelmezett $\| \cdot \| : L^p_{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{R}_+$ leképezés norma.

A mértékelméletből jól ismert továbbá az $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ terek teljességéről szóló alábbi nem-triviális eredmény:

2.15. Riesz-Fischer tétel. *Ha $(X, \mathscr{A}, \mu)$ mértéktér, akkor az $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \| \cdot \|_p)$ normált tér teljes, azaz Banach-tér.*

A továbbiakban élni fogunk azzal a szokásos (némileg félrevezető) konvencióval, hogy az $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ tér elemeit függvényeknek nevezzük, és $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ esetén $[f] \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ helyett a kevésbé bonyolult $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ jelölést használjuk.

2.5. Az elemi Stone–Weierstrass tétel

Az analízisben gyakran hasznos, ha egy normált térnek ismerjük bizonyos kitüntetett sűrű lineáris altereit. Az egyik leggyakrabban alkalmazott normált tér a $\mathscr{C}(K; E)$ tér, ahol K kompakt Hausdorff tér, E pedig normált tér. Abban a speciális esetben, ha K a valós számegyenes egy tetszőleges részhalmaza, értelmezhetők a $K \to E$ polinomfüggvények:

2.16. Definíció. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges nem-üres halmaz és E normált tér. Az $f : K \to E$ függvényt E-értékű *polinomiális függvénynek* (vagy polinomfüggvénynek) nevezzük, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes szám és léteznek olyan $a_0, \dots, a_n \in E$ vektorok, hogy minden $t \in K$ esetén

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Nem nehéz belátni, hogy a polinomiális függvények lineáris alteret alkotnak a $\mathscr{C}(K; E)$ vektortérben. Az alábbiakban igazoljuk a Stone–Weierstrass tételt, amely szerint a $K = [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ esetben a polinomiális függvények sűrűn vannak a maximum normával ellátott $\mathscr{C}([a, b]; E)$ Banach-térben. Másképp fogalmazva, tetszőleges $f : [a, b] \to E$ folytonos függvény egyenletesen approximálható a fent definiált alakú polinomiális függvényekkel. Ezt az eredményt legtöbbször az $E = \mathbb{K}$ esetben szoktuk alkalmazni.

2.17. Lemma. *Rögzített $\mathbb{N} \ni n$ esetén minden $k = 0, 1, \dots, n$ mellett jelölje*

$$\mu_k : [0, 1] \to \mathbb{R}; \qquad \mu_k(t) := \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k}.$$

Ekkor minden $t \in [0, 1]$ esetén teljesülnek a következők:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu_k(t) = 1;$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mu_k(t) = nt;$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mu_k(t) = n(n-1)t^2;$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - nt)^2 \mu_k(t) = nt(1 - t).$

Bizonyítás. Vezessük be az $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x + y)^n$ függvényt. A binomiális tétel alapján minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$f(x, y) = (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Ebből $x = t$ és $y = 1 - t$ választással (a) nyilvánvaló. Másrészt az f függvényt az első változója szerint parciálisan deriválva

$$x \cdot (\partial_1 f)(x, y) = x \cdot n(x + y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k},$$

amiből $x = t$ és $y = 1 - t$ helyettesítéssel kapjuk a (b) azonosságot. Hasonló elv alapján

$$x^2 \cdot (\partial_1^2 f)(x, y) = x^2 \cdot n(n - 1)(x + y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k - 1) x^k y^{n-k},$$

amiből ismét $x = t$ és $y = 1 - t$ helyettesítéssel adódik a (c) azonosság is. Végül a (b) és (c) összefüggések alapján

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\mu_k(t) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mu_k(t) + \sum_{k=0}^{n} k\mu_k(t) = n(n-1)t + nt$$

amiből (d) már egyszerű számolás útján adódik. ■

2.18. Approximáció Bernstein-polinomokkal. *Legyen E normált tér, és legyen $f \in \mathscr{C}([0,1];E)$. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük az alábbi*

$$(2.4) \qquad B_n : [0,1] \to E; \qquad B_n(t) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mu_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k(1-t)^{n-k}$$

polinomfüggvényt. Ekkor $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál f-hez a $[0,1]$ intervallumon, vagyis

$$\sup_{t\in[0,1]} \|f(t) - B_n(t)\| \to 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített pozitív szám. Az f függvény egyenletes folytonossága alapján rögzítsünk egy olyan $\delta > 0$ számot, hogy minden $[0,1] \ni s,t$-re $|s-t| < \delta$ esetén $\|f(s) - f(t)\| < \varepsilon$ teljesül. Rögzített $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ és $t \in [0,1]$ mellett definiáljuk az alábbi indexhalmazt

$$H := H_{n,t} := \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, k \leq n, |\tfrac{k}{n} - t| < \delta\right\}.$$

Világos, hogy minden $k \in H$ esetén $\|f(t) - f(\frac{k}{n})\| < \varepsilon$. Másrészt $H' := \{0,1,\dots,n\} \setminus H$ jelölés mellett a $k \in H'$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy

$$1 \leq \frac{(k-nt)^2}{n^2\delta^2}.$$

Ezek alapján a 2.17 Lemma felhasználásával kapjuk a következő becslést:

$$\begin{aligned}
\|f(t) - B_n(t)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mu_k(t) \right\| \\
&\leq \sum_{k\in H} \left\| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \cdot \mu_k(t) + \sum_{k\in H'} \left\| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \cdot \mu_k(t) \\
&\leq \sum_{k\in H} \varepsilon\mu_k(t) + 2|||f||| \sum_{k\in H'} \mu_k(t) \leq \varepsilon + 2|||f||| \sum_{k\in H'} \frac{(k-nt)^2}{n^2\delta^2}\mu_k(t) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2|||f|||}{n^2\delta^2} nt(1-t) \leq \varepsilon + \frac{2|||f|||}{n\delta^2}.
\end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy bármely $t \in [0,1]$ esetén fennáll, hogy $\|f(t) - B_n(t)\| \leq \varepsilon + \frac{2|||f|||}{n\delta^2}$, vagyis fennáll a

$$\sup_{t\in[0,1]} \|f(t) - B_n(t)\| \leq \varepsilon + \frac{2|||f|||}{n\delta^2}$$

becslés is. Ebből $n \to \infty$ mellett kapjuk, hogy a $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. ■

2.19. Definíció. Ha E normált tér és $f \in \mathscr{C}([0,1];E)$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az előző tétel (2.4) formulájával definiált B_n függvényt az f függvény n-edik *Bernstein-polinomjának* nevezzük.

2.20. Stone–Weierstrass tétel. *Ha $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, és E normált tér, akkor az $[a,b] \to E$ polinomiális függvények halmaza sűrű $\mathscr{C}([a,b];E)$-ben a $|||\cdot|||$ maximum-normára nézve.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathscr{C}([a,b];E)$. Világos, hogy az alábbi

$$\varphi : [a,b] \to [0,1]; \qquad t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$$

függvény homeomorfizmus, továbbá minden $p : [0,1] \to E$ polinomfüggvényre $p \circ \varphi$ is polinom. Az előző tétel értelmében a létezik $[0,1] \to E$ polinomfüggvények olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál $[0,1]$-en az $f \circ \varphi^{-1}$ folytonos függvényhez. Ekkor

$$\sup_{s\in[a,b]} \|f(s) - p_n(\varphi(s))\| = \sup_{t\in[0,1]} \|f(\varphi^{-1}(t)) - p_n(t)\| \to 0,$$

ami éppen azt jelenti, hogy a $(p_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ polinomfüggvény-sorozat egyenletesen konvergál f-hez az $[a,b]$ halmazon. ■

2.21. Megjegyzés. A fentiekhez hasonlóan definiálhattuk volna valamely $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt nem-üres halmaz esetén a K-n értelmezett E értékű polinomiális függvényeket, valamint a $\mathscr{C}(K;E)$ függvényteret. Azonban ebben az esetben a fenti approximációs tétel már nem marad érvényben: ha ugyanis K jelöli a komplex zárt egységkörlapot és E a komplex számtestet, akkor egy $p_n : K \to \mathbb{C}$ típusú polinomiális függvényekből álló függvénysorozat egyenletes limesze a K belsejében holomorf függvény lesz. Ez azt jelenti, hogy egy K-n folytonos, de a K belsejében nem holomorf függvény biztosan nem approximálható egyenletesen polonimiális függvényekkel.

2.6. Teljesen korlátos halmazok és az Arzela–Ascoli-tétel

Ebben a fejezetben jellemezni fogjuk egy adott K kompakt metrikus tér esetén a $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ függvénytér kompakt halmazait.

2.22. Tétel. *Legyenek A és B tetszőleges nem-üres halmazok és (X,d) egy metrikus tér, legyen továbbá $\Phi : A \times B \to X$ egy adott függvény. Tegyük fel, hogy Φ rendelkezik a következő két tulajdonsággal:*

(a) *bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik A-nak olyan $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ véges fedése, hogy minden i-re és minden $y \in B$ és $u, v \in A_i$ pontra $d(\Phi(u,y), \Phi(v,y)) < \varepsilon$,*

(b) *bármely $x \in A$ ponthoz és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik B-nek olyan (x-től függő) $(B_j)_{j\in\mathscr{J}}$ véges fedése, hogy minden j-re és minden $w, z \in B_j$ pontra $d(\Phi(x,w), \Phi(x,z)) < \varepsilon$.*

Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az B-nek olyan $(B_k)_{k\in\mathscr{K}}$ véges fedése, hogy minden k-ra és minden $x \in A$ és $z, w \in B_k$ pontra $d(\Phi(x,w), \Phi(x,z)) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ és legyen $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ az A halmaz egy olyan véges fedése, hogy minden i-re $A_i \neq \emptyset$ és

$$d(\Phi(u,y), \Phi(v,y)) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad y \in B, u, v \in A_i. \tag{2.5}$$

Minden i-re rögzítsünk egy $x_i \in A_i$ pontot, akkor (b) alapján létezik olyan $(B_{i,j})_{j\in\mathscr{I}_i}$ véges rendszer, amely a B halmaz egy fedését adja, és bármely $j \in \mathscr{I}_i$ esetén

$$d(\Phi(x_i, w), \Phi(x_i, z)) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad w, z \in B_{i,j}. \tag{2.6}$$

Jelölje $\mathscr{K}$ azon $k : \mathscr{I} \to \bigcup\limits_{i\in\mathscr{I}} \mathscr{I}_i$ függvények halmazát, amelyekre fennáll, hogy minden $i \in \mathscr{I}$ esetén $k(i) \in \mathscr{I}_i$, és rögzített $k \in \mathscr{K}$ esetén vezessük be a

$$B_k := \bigcap_{i\in\mathscr{I}} B_{i,k(i)}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy a $(B_k)_{k\in\mathscr{K}}$ véges rendszer eleget tesz a tételben előírtaknak. Elsőként vegyük észre, hogy $(B_k)_{k\in\mathscr{K}}$ lefedi a B halmazt, ha ui. $y \in B$ és $i \in \mathscr{I}$, akkor létezik olyan $k(i) := j \in \mathscr{I}_i$ index, hogy $y \in B_{i,k(i)}$, amiből következik, hogy az így definiált $k \in \mathscr{K}$ függvényre $y \in B_k$ teljesül. Végezetül legyen $x \in A$ és rögzített $k \in \mathscr{K}$ mellett legyenek $z, w \in B_k$ tetszőlegesek. Legyen $i \in \mathscr{I}$ olyan index, amelyre $x \in A_i$, akkor (2.5) alapján

$$d(\Phi(x, w), \Phi(x_i, w)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{és} \qquad d(\Phi(x, z), \Phi(x_i, z)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

továbbá $w, z \in B_k$ miatt egyúttal $w, z \in B_{i,k(i)}$, ezért (2.6) alapján

$$d(\Phi(x_i, w), \Phi(x_i, z)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Következésképp kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d(\Phi(x, w), \Phi(x, z)) &\le d(\Phi(x, w), \Phi(x_i, w)) + d(\Phi(x_i, w), \Phi(x_i, z)) + d(\Phi(x_i, z), \Phi(x, z)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

amivel a tételt igazoltuk. ■

Az alábbiakban mindenütt K kompakt topologikus tér, illetve $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(K; \mathbb{K})$ egy nem-üres függvénycsalád.

2.23. Definíció. Az $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(K; \mathbb{K})$ függvénycsaládot *pontonként korlátosnak* nevezzük, ha bármely $t \in K$ esetén az $\{f(t) \,|\, t \in K\} \subseteq \mathbb{K}$ halmaz korlátos.

2.24. Definíció. Az $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(K; \mathbb{K})$ függvénycsaládot a $t \in K$ pontban *ekvifolytonosnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik a t pontnak olyan V_t környezete, hogy bármely $f \in \mathscr{F}$ és $s \in V_t$ esetén $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$. Az $\mathscr{F}$ függvénycsaládot *ekvifolytonosnak* nevezzük, ha a K minden t pontjában ekvifolytonos.

Vegyük észre, hogy az $\mathscr{F}$ függvénycsalád pontosan akkor ekvifolytonos a $t \in K$ pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ szám mellett a

$$V_t := \bigcap_{f\in\mathscr{F}} f^{-1}\Big\langle B_\varepsilon(f(t))\Big\rangle \tag{2.7}$$

halmaz a $t \in K$ pont egy környezete.

2.25. Tétel. *Legyen K kompakt Hausdorff-tér. Egy $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(K; \mathbb{K})$ nem-üres függvénycsalád pontosan akkor teljesen korlátos, ha pontonként korlátos és ekvifolytonos.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $\mathscr{F}$ halmaz teljesen korlátos, akkor $\mathscr{F}$ korlátos $\mathscr{C}(K;\mathbb{K})$-ban a maximum norma szerint, amiből egyszerűen adódik, hogy $\mathscr{F}$ pontonként korlátos. Legyen továbbá $t \in K$ egy tetszőleges pont, megmutatjuk, hogy $\mathscr{F}$ ekvifolytonos t-ben. Legyen ui. $\varepsilon > 0$, akkor létezik véges sok $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathscr{F}$ függvény, hogy

$$\mathscr{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(f_i).$$

Jelölje

$$V_i := f_i^{-1}\Big\langle B_\varepsilon(f_i(t))\Big\rangle, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

akkor minden i mellett V_i a t pont egy nyílt környezete, ezért a $V := V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$ halmaz is a t pont egy környezete. Továbbá ha $s \in V$ és $f \in \mathscr{F}$, akkor létezik olyan i, amelyre $|||f - f_i||| < \varepsilon$, ezért

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f_i(t)| + |f_i(t) - f_i(s)| + |f_i(s) - f(t)| < 3\varepsilon,$$

amiből következik, hogy $\mathscr{F}$ ekvifolytonos t-ben.

Megfordítva tegyük fel, hogy $\mathscr{F}$ pontonként korlátos és ekvifolytonos függvénycsalád. Megmutatjuk, hogy $\mathscr{F}$ teljesen korlátos. Legyen $\varepsilon > 0$, akkor bármely $t \in K$ pont mellett a (2.7) alatti V_t halmaz a t egy környezetét adja. Világos, hogy a $(V_t)_{t\in K}$ halmazrendszer a K kompakt halmaz egy fedését adja, ezért létezik véges sok $t_1, t_2, \ldots, t_n \in K$ pont úgy, hogy

$$K = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n.$$

Az $\mathscr{F}$ függvénycsalád pontonként korlátos, ezért az alábbi

$$\{(f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)) \mid f \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

halmaz is korlátos, következésképp teljesen korlátos. Emiatt az $\varepsilon > 0$ számhoz létezik véges sok $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathscr{F}$ függvény, hogy bármely $f \in \mathscr{F}$ függvényhez létezik olyan alkalmas $k = 1, 2, \ldots, m$ index, hogy

$$|f(t_i) - f_k(t_i)| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\mathscr{F} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_{3\varepsilon}(f_k). \tag{2.9}$$

Legyen ui. $f \in \mathscr{F}$, akkor létezik olyan f_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ függvény, amely mellett (2.8) fennáll. Ha továbbá $t \in K$, akkor létezik olyan i index, hogy $t \in V_{t_i}$, ezért $|f(t) - f(t_i)| < \varepsilon$ és egyúttal $|f_k(t) - f_k(t_i)| < \varepsilon$ is fennáll, következésképp

$$|f(t) - f_k(t)| \leq |f(t) - f(t_i)| + |f(t_i) - f_k(t_i)| + |f_k(t_i) - f_k(t)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,$$

vagyis $|||f - f_k||| < 3\varepsilon$. Ezzel a (2.9) tartalmazást és egyúttal az $\mathscr{F}$ halmaz teljesen korlátosságát is beláttuk. ■

2.26. Arzela–Ascoli-tétel. *Legyen K kompakt Hausdorff-tér. Egy $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(K;\mathbb{K})$ függvényhalmaz pontosan akkor kompakt, ha pontonként korlátos, zárt, és ekvifolytonos.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző Tételből és abból, hogy teljes metrikus tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha teljesen korlátos és zárt. ■

2.7. Approximáció folytonos függvényekkel

Az alábbiakban legyen $(T, \mathscr{T})$ egyelőre tetszőleges topologikus tér és jelölje $\mathscr{B}(T)$ a T Borel-halmazainak σ-algebráját, vagyis a T-beli nyílt halmazok által generált σ-algebrát. Legyen μ a $\mathscr{B}(T)$-n értelmezett mérték. Ha μ véges, azaz $\mu(T) < +\infty$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy minden $f : T \to \mathbb{K}$ folytonos és korlátos függvény bármely $1 \leq p \leq +\infty$ mellett p-edik hatványon integrálható, vagyis $\mathscr{C}^b(T; \mathbb{K}) \subseteq \mathscr{L}^p(T, \mathscr{B}(T), \mu)$. Az alábbiakban megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy milyen feltételek mellett lesz $\mathscr{C}^b(T; \mathbb{K})$ mindenütt sűrű halmaz az $\mathscr{L}^p(\mu) := \mathscr{L}^p(T, \mathscr{B}(T), \mu)$ félnormált térben. Ezzel kapcsolatban felidézzük a reguláris Borel-mértékek fogalmát.

2.27. Definíció. Legyen $(T, \mathscr{T})$ Hausdorff-tér és jelölje $\mathscr{B}(T)$ a T Borel-halmazainak σ-algebráját. Egy $\mu : \mathscr{B}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mértéket *Borel-mértéknek* nevezünk, ha minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra $\mu(K) < +\infty$. A μ Borel-mértéket *regulárisnak* nevezzük, ha bármely $A \in \mathscr{B}(T)$ halmazra

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(K) \mid K \in \mathscr{K}, K \subseteq A\} \\ &= \inf\{\mu(G) \mid G \in \mathscr{G}, A \subseteq G\},\end{aligned}$$

ahol $\mathscr{K}$, illetve $\mathscr{G}$ jelöli a T kompakt, illetve nyílt halmazainak osztályát.

Megjegyezzük, hogy egy Hausdorff-térben minden kompakt halmaz zárt, ezért $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{B}(T)$, vagyis a fenti definícióban a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér Hausdorff volta biztosítja azt, hogy a μ mérték értelmezve legyen a kompakt halmazokon.

2.28. Tétel. *Legyen T kompakt Hausdorff-tér és μ a T Borel-halmazain értelmezett reguláris Borel-mérték, legyen továbbá $1 \leq p < +\infty$ valós szám. Ekkor minden $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ függvényhez és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $g \in \mathscr{C}(T; \mathbb{K})$ folytonos függvény, hogy $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy $\mu(T) < +\infty$, hiszen T kompakt és μ Borel-mérték, ezért bármely $1 \leq p < +\infty$ esetén $\mathscr{C}(T; \mathbb{K}) = \mathscr{C}^b(T; \mathbb{K}) \subseteq \mathscr{L}^p(\mu)$. Ismeretes, hogy a lépcsős függvények $\mathscr{E} := \operatorname{span}\{\chi_A \mid A \in \mathscr{B}(T)\}$ halmaza sűrű az $\mathscr{L}^p(\mu)$ térben (vagyis bármely $\mathscr{L}^p(\mu) \ni f$-hez és $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan φ lépcsős függvény, hogy $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$), ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy bármely Borel-halmaz karakterisztikus függvénye a $\|\cdot\|_p$ normában approximálható folytonos függvényekkel. Legyen tehát $A \in \mathscr{B}(T)$ tetszőleges Borel-halmaz, ekkor a μ mérték regularitása miatt bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $G \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $A \subseteq G$ és $\mu(G \setminus A) < \varepsilon^p$, ekkor

$$\|\chi_G - \chi_A\|_p = \|\chi_{G \setminus A}\|_p = \mu(G \setminus A)^{1/p} < \varepsilon.$$

Emiatt tehát elegendő azt megmutatni, hogy bármely nyílt halmaz karakterisztikus függvénye a $\|\cdot\|_p$ normában approximálható folytonos függvényekkel. Legyen tehát $G \subseteq T$ tetszőleges nyílt halmaz és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, ekkor a μ regularitása miatt található olyan $K \subseteq T$ kompakt (következésképp zárt) halmaz, hogy $K \subseteq G$ és $\mu(G \setminus K) < \varepsilon^p$. Mivel a T kompakt Hausdorff-tér normális, K és $T \setminus G$ pedig annak diszjunkt zárt részhalmazai, azért az Uriszon-lemma alapján létezik $h \in \mathscr{C}(T; \mathbb{R})$ folytonos függvény, hogy $0 \leq h \leq 1$ és

$$h|_K = 1, \qquad h|_{T \setminus G} = 0.$$

Világos, hogy $\chi_K \leq h \leq \chi_G$, ezért

$$\|\chi_G - h\|_p^p = \int_T (\chi_G - h)^p \, d\mu \leq \int_T (\chi_G - \chi_K)^p \, d\mu = \mu(G \setminus K) < \varepsilon^p,$$

azaz $\|\chi_G - h\|_p < \varepsilon$. Ezzel tehát megmutattuk, hogy bármely $f \in \mathscr{L}^p(T, \mu)$ függvényhez és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $g \in \mathscr{C}(T; \mathbb{K})$ függvény, hogy $\|f - g\|_p < \varepsilon$. ■

A fenti tétel egyik legfontosabb alkalmazásaként kapjuk a következő eredményt. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt intervallum, és jelölje $\mathscr{B}(I)$ az I Borel-halmazainak σ-algebráját, illetve jelölje λ_I az $\mathbb{R}$ feletti Lebesgue-mérték $\mathscr{B}(I)$-re vett megszorítását. Tetszőleges $1 \leq p \leq +\infty$ mellett jelölje

$$\mathscr{L}^p(I) := \mathscr{L}^p(I, \mathscr{B}(I), \lambda_I), \qquad \text{illetve} \qquad L^p(I) := L^p(I, \mathscr{B}(I), \lambda_I).$$

2.29. Következmény. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt intervallum, és legyen $1 \leq p < +\infty$, ekkor bármely $f \in \mathscr{L}^p(I)$ függvényhez létezik olyan $g \in \mathscr{C}(I; \mathbb{K})$ folytonos függvény, hogy $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik a λ_I mérték regularitásából és a 2.28 Tételből. ■

3. FEJEZET

Hilbert-terek

3.1. Prehilbert és Hilbert-terek

Ebben a fejezetben bevezetjük az ún. Hilbert-terek fogalmát, illetve áttekintjük azok legfontosabb geometriai jellemzőit. A következő definícióban megadunk egy olyan függvénytípust, amelynek segítségével definiálni tudjuk az ún. prehilbert terek fogalmát.

3.1. Definíció. Ha E vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor egy $(\cdot\,|\,\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ függvényt E feletti *skaláris szorzatnak* nevezünk, ha teljesülnek rá az alábbi feltételeknek:

(1) minden $y \in E$ esetén a $(\cdot\,|\,y) : E \to \mathbb{K}$ parciális függvény lineáris,
(2) minden $x, y \in E$ esetén $(x\,|\,y) = \overline{(y\,|\,x)}$,
(3) minden $x \in E$ esetén $(x\,|\,x) \geq 0$ és $(x\,|\,x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$.

Az $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ párt *prehilbert térnek* nevezzük, ha E vektortér és $(\cdot\,|\,\cdot)$ E feletti skaláris szorzat.

A továbbiakban élünk azzal a szokásos konvencióval, hogy - hacsak félreértést nem okoz - a prehilbert tereket egyetlen szimbólummal, az alaphalmaz jelével jelöljük.

Vegyük észre, hogy valós E prehilbert tér esetén bármely rögzített $x \in E$ vektor mellett az $(x\,|\,\cdot)$ parciális függvény is lineáris, vagyis ilyenkor $(\cdot\,|\,\cdot)$ bilineáris leképezés, ugyanakkor komplex prehilbert tér esetén bármely $x \in E$ mellett az $(x\,|\,\cdot)$ parciális függvény konjugáltan lineáris, ilyenkor a $(\cdot\,|\,\cdot)$ függvényt *szeszkvilineáris* leképezésnek is szokás nevezni.

Az alábbiakban bizonyítjuk a skaláris szorzatokra vonatkozó egyik legfontosabb egyenlőtlenséget:

3.2. Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség. *Ha E prehilbert tér, úgy tetszőleges $x, y \in E$ vektorok esetén fennáll, hogy*

$$|(x\,|\,y)|^2 \leq (x\,|\,x)(y\,|\,y) \tag{3.1}$$

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in E$ tetszőleges vektorok, és tegyük fel, hogy $y \neq 0$ (ellenkező esetben a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalán nulla áll). Ekkor a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Big((y\,|\,y)x - (x\,|\,y)y \,\Big|\, (y\,|\,y)x - (x\,|\,y)y\Big) \\ &= (y\,|\,y) \cdot \Big[(y\,|\,y)(x\,|\,x) - \overline{(x\,|\,y)}(x\,|\,y)\Big] \end{aligned}$$

becslést nyerjük, amiből az $(y\,|\,y)$ pozitív számmal való egyszerűsítés után éppen a bizonyítandó (3.1) egyenlőtlenséget adódik. ■

A Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség egyik legfontosabb következménye az alábbi eredmény:

3.3. Tétel. *Legyen E prehilbert tér a $\mathbb{K}$ test felett, akkor az alábbi*

$$\|x\| := \sqrt{(x \,|\, x)}, \qquad x \in E \tag{3.2}$$

egyenlőséggel bevezetett $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ függvény norma.

Bizonyítás. Világos, hogy tetszőleges $x \in E$ vektor esetén $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$. Másfelől az is egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. Az egyetlen nem magától értetődő tulajdonság a háromszög-egyenlőtlenség: ennek igazolásához legyenek $x, y \in E$ tetszőleges vektorok. A Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + (x \,|\, y) + (y \,|\, x) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x \,|\, y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \Big[\|x\| + \|y\|\Big]^2,\end{aligned}$$

amiből a háromszög-egyenlőtlenség már adódik. ■

3.4. Definíció. Ha E prehilbert tér, akkor a (3.2) egyenlőséggel definiált $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ E feletti normát a skaláris szorzat által meghatározott normának nevezzük.

A norma jelölés bevezetésével a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség az alábbi ekvivalens módon fogalmazható át:

3.5. Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség. *Ha E prehilbert tér, akkor tetszőleges $x, y \in E$ vektorokra fennáll az*

$$|(x \,|\, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

egyenlőtlenség, ahol $\|\cdot\|$ a skaláris szorzat által meghatározott norma.

Minthogy egy prehilbert tér normáját egy speciális függvény (éspedig a skaláris szorzat) segítségével definiáltuk, azért az rendelkezik néhány meghatározó tulajdonsággal, amely nem igaz tetszőleges normára. Az egyik ilyen karakterizáló tulajdonság az alábbi

3.6. Paralelogramma-egyenlőség. *Ha E prehilbert tér, akkor bármely $x, y \in E$ vektorok esetén fennáll, hogy*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{3.3}$$

Ennek ellenőrzése triviális számolás, így azt az olvasóra bízzuk. Az alábbiakban igazoljuk P. Jordan és Neumann János egy 1935-ös eredményét, miszerint egy normált tér pontosan akkor prehilbert tér, ha abban minden x, y vektorra fennáll a (3.3) egyenlőség. Ez esetben ui. megadható a téren olyan skaláris szorzat, hogy az általa meghatározott norma megegyezik a tér eredeti normájával.

Ezzel kapcsolatban kérdés, hogy egy prehilbert tér normájának ismeretében hogyan nyerhető vissza a skaláris szorzat – erre ad választ az alábbi eredmény:

3.7. Polarizációs formulák. *Bármely E prehilbert tér x, y vektoraira fennállnak az alábbi polarizációs formulák:*

(a) *valós prehilbert tér esetén*

$$(x \,|\, y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big),$$

(b) *komplex prehilbert tér esetén*

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big).$$

3.8. Jordan–Neumann-tétel. *Legyen E olyan (valós vagy komplex) normált tér, melynek normája eleget tesz a paralelogramma-egyenlőségnek, azaz E bármely x, y vektorára fennáll, hogy*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Ekkor létezik olyan skaláris szorzat E-n, hogy az abból származó norma megegyezik E eredeti normájával.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy E *valós* normált tér. Definiáljuk a polarizációs formuláknak megfelelően az x, y vektorok $(x \mid y)$ „skaláris-szorzatát” az

$$(x \mid y) := \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big), \qquad x, y \in E$$

egyenlőséggel. A definíció alapján világos, hogy $(\cdot \mid \cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $(x \mid x) = \|x\|^2$, ezért elég azt igazolnunk, hogy $(\cdot \mid \cdot)$ skaláris szorzat az E valós vektortér felett.

Elsőként igazoljuk, hogy $(\cdot \mid \cdot)$ additív az első változójában. Legyenek ui. $x_1, x_2, y \in E$ tetszőleges vektorok, akkor a paralelogramma egyenlőség átrendezésével kapott

$$\|u+v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 - \|u-v\|^2$$

formulát az $u = x_1 + y$, $v = x_2$, majd pedig az $u = x_2 + y, v = x_1$ vektorokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|x_1 + x_2 + y\|^2 &= 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 - x_2 + y\|^2 =: \alpha,\\
\|x_1 + x_2 + y\|^2 &= 2\|x_2 + y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|-x_1 + x_2 + y\|^2 =: \beta,
\end{aligned}$$

amiből nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
\|x_1 + x_2 + y\|^2 &= \frac{\alpha+\beta}{2}\\
&= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2\\
&\qquad - \frac{1}{2}\|x_1 - x_2 + y\|^2 - \frac{1}{2}\|-x_1 + x_2 + y\|^2.
\end{aligned}$$

Hasonlóképp, a fenti formulában y-t a $-y$ vektorra cserélve

$$\begin{aligned}
\|x_1 + x_2 - y\|^2 &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_1 - y\|^2 + \|x_2 - y\|^2\\
&\qquad - \frac{1}{2}\|x_1 - x_2 - y\|^2 - \frac{1}{2}\|-x_1 + x_2 - y\|^2\\
&= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_1 - y\|^2 + \|x_2 - y\|^2\\
&\qquad - \frac{1}{2}\|-x_1 + x_2 + y\|^2 - \frac{1}{2}\|x_1 - x_2 + y\|^2.
\end{aligned}$$

Ezek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(x_1+x_2\,|\,y) &= \frac{1}{4}(\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2-\|x_1-y\|^2-\|x_2-y\|^2)\\ &= (x_1\,|\,y)+(x_2\,|\,y),\end{aligned}$$

amivel megmutattuk, hogy $(\cdot\,|\,\cdot)$ az első változójában additív.

Megmutatjuk, hogy $(\cdot\,|\,\cdot)$ első változójában homogén. Az additivitás alapján világos, hogy bármely $x, y \in E$ és $n \in \mathbb{N}$ mellett

$$(nx\,|\,y) = n(x\,|\,y),$$

illetve ismét az additivitás folytán

$$0 = (x-x\,|\,y) = (x\,|\,y) + (-x\,|\,y),$$

vagyis $(-x\,|\,y) = -(x\,|\,y)$, következésképp

$$(nx\,|\,y) = n(x\,|\,y), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Ha pedig $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, akkor

$$n(\lambda x\,|\,y) = (mx\,|\,y) = m(x\,|\,y) = n\lambda(x\,|\,y),$$

amiből kapjuk, hogy minden $\lambda \in \mathbb{Q}$ racionális számra $(\lambda x\,|\,y) = \lambda(x\,|\,y)$. A norma folytonossága alapján világos, hogy

$$\lambda \mapsto (\lambda x\,|\,y), \qquad \lambda \mapsto \lambda(x\,|\,y)$$

olyan valós folytonos függvények, amelyek a $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ sűrű halmazon megegyeznek, amiből már következik, hogy a $(\lambda x\,|\,y) = \lambda(x\,|\,y)$ egyenlőség bármely valós λ esetén is teljesül.

Könnyen látható, hogy $(\cdot\,|\,\cdot)$ szimmetrikus és minden x-re $(x\,|\,x) = \|x\|^2$, következésképp $(\cdot\,|\,\cdot)$ pozitív definit. Mindezek figyelembevételével már következik, hogy $(\cdot\,|\,\cdot)$ olyan skaláris szorzat, amelyből származtatott norma megegyezik E eredeti normájával.

A $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eset hasonló technikával igazolható. ■

Minthogy minden prehilbert tér egyúttal normált tér is, ezért van értelme prehilbert terek teljességéről beszélni. Ezzel kapcsolatos az alábbi

3.9. Definíció. A $\mathcal{H}$ prehilbert teret *Hilbert-térnek* nevezzük, ha $\mathcal{H}$ a skaláris szorzat által generált normával teljes, vagyis Banach-tér.

Az alábbiakban felsorolunk néhány alapvetően fontos konkrét példát Hilbert-terekre.

3.10. Példák. (1) Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, ekkor $\mathbb{K}^n$ a szokásos

$$(x\,|\,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}, \qquad x, y \in \mathbb{K}^n$$

skalárszorzattal Hilbert-tér.

(2) Az $\ell^2_{\mathbb{K}}$ sorozattér az alábbi

$$(x\,|\,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathbb{K}},$$

egyenlőséggel definiált skalárszorzattal Hilbert-tér.

(3) Legyen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ mértéktér, akkor a négyzetesen integrálható függvények $L^2(\mu)$ tere az alábbi

$$(f \mid g)_2 := \int_X f \cdot \overline{g}\, d\mu, \qquad f, g \in L^2(\mu)$$

skalárszorzattal prehilbert-tér. Emellett nyilvánvaló, hogy e skalárszorzat által meghatározott norma azonos az $L^2(\mu)$ feletti $\|\cdot\|_2$ normával, ezért a Riesz–Fischer-tétel értelmében $L^2(\mu)$ Hilbert-tér.

3.11. Állítás. *Ha E prehilbert tér, akkor az E-beli skalárszorzat folytonos.*

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy az $(\cdot \mid \cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ leképezés folytonos a megfelelő topológiák szerint. Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-ben haladó sorozatok, $x, y \in E$ pedig olyan vektorok, hogy $x_n \to x$, illetve $y_n \to y$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned}|(x_n \mid y_n) - (x \mid y)| &= \Big|\Big((x_n - x) + x \,\Big|\, (y_n - y) + y\Big) - (x \mid y)\Big| \\ &= |(x_n - x \mid y) + (x \mid y_n - y) + (x_n - x \mid y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y\| + \|x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y_n - y\|,\end{aligned}$$

tehát $n \to \infty$ esetén $(x_n \mid y_n) \to (x \mid y)$. ■

3.12. Állítás. *Ha E prehilbert tér, akkor minden $y \in E$ esetén az*

$$f_y(x) := (x \mid y), \qquad x \in E, \tag{3.4}$$

egyenlőséggel értelmezett $f_y : E \to \mathbb{K}$ függvény folytonos lineáris funkcionál, melynek normájára fennáll az $\|f_y\| = \|y\|$ egyenlőség.

Bizonyítás. Világos, hogy f_y lineáris funkcionál E-n, továbbá a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség szerint minden $x \in E$ esetén

$$|f_y(x)| = |(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|,$$

amiből kapjuk, hogy f_y folytonos és normájára fennáll az $\|f_y\| \leq \|y\|$ becslés. Világos továbbá, hogy ha $y = 0$, akkor $f_y = 0$, így ekkor az $\|f_y\| = \|y\|$ egyenlőség triviális módon teljesül. Ha pedig $y \in E$ tetszőleges nem nulla vektor, akkor az $x := \frac{y}{\|y\|}$ választással nyert $x \in E$ vektor olyan, hogy $\|x\| = 1$ és

$$|f_y(x)| = \frac{1}{\|y\|}(y \mid y) = \|y\|,$$

amiből az $\|f_y\| \geq \|y\|$ egyenlőtlenség adódik. Ezzel megmutattuk, hogy bármely $y \in E$ esetén fennáll az $\|f_y\| = \|y\|$ egyenlőség. ■

3.2. Ortonogonalitás és a Riesz-féle felbontási tétel

Az alábbi definícióban bevezetjük prehilbert térben a merőlegesség fogalmát:

3.13. Definíció. Legyen E prehilbert tér a $\mathbb{K}$ test felett. Az $x, y \in E$ vektorokat egymásra *merőlegesnek* (vagy *ortogonálisnak*) nevezzük – jelölésben $x \perp y$ – ha a skaláris szorzatuk nulla, azaz $(x \mid y) = 0$. Ha $M \subseteq E$ tetszőleges nem-üres halmaz, akkor az M-re merőleges vektorok halmazát, vagyis az

$$M^\perp := \{x \in E \mid (\forall y \in M) : \ (x \mid y) = 0\}$$

halmazt az M *ortogonális komplementerének* nevezzük.

Világos, hogy az $x \perp y$ kijelentés ekvivalens az $y \perp x$ kijelentéssel, továbbá nyilvánvalóan $x = 0$ az egyetlen olyan vektor, amely merőleges önmagára. Speciálisan, fennáll az $E^\perp = \{0\}$ egyenlőség. Vigyázzunk azonban arra, hogy ha egy $M \subseteq E$ halmazra $M^\perp = \{0\}$ teljesül, abból nem feltétlenül következik, hogy $M = E$ volna.

A következő állításban megvizsgáljuk prehilbert térben az ortogonális komplementer halmaz legfontosabb elemi tulajdonságait.

3.14. Állítás. *Legyen E prehilbert tér és legyenek $N, M \subseteq E$ tetszőleges halmazok. Ekkor*

(a) *$M^\perp$ zárt lineáris altere E-nek,*
(b) *ha $N \subseteq M$, akkor $M^\perp \subseteq N^\perp$,*
(c) *$M \subseteq M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$ és $M^{\perp\perp\perp} = M^\perp$.*

Bizonyítás. (a) Legyen $M \subseteq E$ halmaz és jelölje $y \in E$ esetén f_y az (3.4) egyenlőséggel értelmezett függvényt, akkor a 3.12 Állítás szerint f_y folytonos lineáris funkcionál és nyilvánvalóan fennáll az

$$M^\perp = \bigcap_{y \in M} \ker f_y \tag{3.5}$$

egyenlőség, amelyből látható, hogy $M^\perp$ zárt lineáris altere E-nek.

(b) Legyenek $N, M \subseteq E$ tetszőleges halmazok, akkor a (3.5) formulából kapjuk, hogy $N \subseteq M$ esetén

$$M^\perp = \bigcap_{y \in M} \ker f_y \subseteq \bigcap_{y \in N} \ker f_y = N^\perp,$$

azaz $M^\perp \subseteq N^\perp$.

(c) Legyen ismét $M \subseteq E$ egy tetszőleges halmaz, akkor a merőleges kiegészítő altér definíciójából nyilvánvalóan következik, hogy $M \subseteq M^{\perp\perp}$, ebből pedig egyrészt $M^\perp \subseteq (M^\perp)^{\perp\perp}$, másfelől (b) felhasználásával $(M^{\perp\perp})^\perp \subseteq M^\perp$. Mivel $(M^{\perp\perp})^\perp = (M^\perp)^{\perp\perp}$, ezért $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$, amivel a (c) kijelentést is igazoltuk. ■

Megjegyezzük, hogy $M \subseteq E$ esetén az $M^{\perp\perp} \subseteq E$ halmazt az M *bi-ortokomplementerének* nevezzük.

3.15. Állítás. *Legyen E prehilbert tér, akkor tetszőlges $M \subseteq E$ nem-üres halmaz esetén fennáll, hogy*

$$M^\perp = [\overline{\operatorname{span} M}]^\perp.$$

Bizonyítás. Az $M \subseteq \overline{\operatorname{span} M}$ tartalmazásból és az 3.14 Állítás (b) pontja alapján világos, hogy $[\overline{\operatorname{span} M}]^\perp \subseteq M^\perp$, ezért elég a fordított tartalmazást igazolnunk. Legyen tehát $y \in M^\perp$ egy tetszőleges vektor és vezessük be az f_y függvényt a (3.4) egyenlőségen keresztül, akkor világos, hogy $M \subseteq \ker f_y$, vagyis az f_y folytonos lineáris funkcionál $\ker f_y$ magtere olyan zárt lineáris altér E-ben, amely tartalmazza M-et, ezért tartalmazza az M által generált zárt lineáris alteret is, vagyis fennáll a

$$\overline{\operatorname{span} M} \subseteq \ker f_y$$

tartalmazás is, amivel megmutattuk, hogy bármely $x \in \overline{\operatorname{span} M}$ esetén

$$0 = f_y(x) = (x \,|\, y),$$

vagyis $y \in [\overline{\operatorname{span} M}]^\perp$, amivel az $M^\perp \subseteq [\overline{\operatorname{span} M}]^\perp$ tartalmazást és egyúttal az állítást is beláttuk. ■

Az alábbiakban emlékeztetünk arra, hogy ha (X, d) metrikus tér, Y egy tetszőleges nemüres részhalmaza X-nek, akkor egy $x \in X$ pontnak az Y halmaztól való távolságát a

$$d_Y(x) := \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\}$$

egyenlőséggel értelmezzük. Azt mondjuk, hogy a fenti távolság *realizálódik*, ha létezik olyan $y_0 \in Y$ pont, amely mellett $d(x, y_0) = d_Y(x)$.

Megjegyezzük, hogy egy pontnak egy halmaztól való távolsága nem feltétlen realizálódik még akkor sem, ha a tér teljes és a szóban forgó halmaz zárt. Sőt, adható példa olyan Banach-térre, amelyben van olyan zárt altér és olyan pont, hogy a pontnak az altértől való távolsága nem realizálódik. Ezzel szemben Hilbert-terek esetén igaz a következő Riesz Frigyestől származó eredmény:

3.16. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, legyen továbbá $K \subseteq \mathcal{H}$ nemüres konvex zárt halmaz. Ekkor bármely $x \in \mathcal{H}$ pontnak a K halmaztól való távolsága realizálódik, éspedig egyetlen pontban, azaz létezik egyetlen $y_K \in K$ pont, amely mellett*

$$d_K(x) = \|x - y_K\|.$$

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathcal{H}$ rögzített pont. A rövidség kedvéért vezessük be a

$$d := d_K(x) = \inf\Big\{\|x - y\| \,\Big|\, y \in K\Big\}$$

jelölést. Az az infimum értelmezése miatt vehetünk olyan K-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozatot, amelyre

$$d_n := \|x - x_n\| \to d, \qquad n \to \infty.$$

Tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén paralelogramma-egyenlőséget felírva az $x - x_n$ és $x_m - x$ vektorokra nyerjük, hogy

$$\|2x - (x_n + x_m)\|^2 + \|x_m - x_n\|^2 = 2\Big(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2\Big) = 2(d_n^2 + d_m^2).$$

Ebből egyszerű átalakítás után kapjuk, hogy

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2) - 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2.$$

A K halmaz konvexitása miatt minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in K$, ezért a d szám értelmezése folytán

$$\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geq d^2,$$

aminek figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\|x_m - x_n\|^2 \leq 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2.$$

Mivel $d_n \to d$, így a fenti egyenlőtlenség jobboldala 0-hoz tart. Következésképp $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, így $\mathcal{H}$ teljessége alapján létezik $y_K \in \mathcal{H}$ határétéke, melyre a K halmaz zártsága miatt $y_K \in K$ is teljesül. A norma folytonosságát használva kapjuk, hogy

$$d_K(x) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \|y_K - x\|,$$

vagyis a $d_K(x)$ távolság valóban realizálódik az $y_K \in K$ pontban.

Ezzel igazoltuk, hogy tetszőleges olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K-ban haladó sorozat konvergens, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = d_K(x)$ teljesül. Speciálisan, ha $y, y' \in K$ olyan vektorok, hogy

$$\|y - x\| = \|y' - x\| = d_K(x),$$

akkor az alábbi

$$x_{2n} := y, \quad x_{2n+1} := y', \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ mellett $\|x_n - x\| = d_K(x)$. A fentiek szerint az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ami csak úgy lehetséges, ha $y = y'$, amivel az y_K pont egyértelműségét is igazoltuk. ■

3.17. Következmény. *Egy $\mathcal{H}$ Hilbert-tér tetszőleges nemüres zárt konvex részhalmazának van legkisebb normájú eleme.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt az $x = 0$ speciális esetben. ■

Megjegyezzük, hogy a fenti bizonyításban valójában csak azt a tényt használtuk, hogy a K konvex halmaz *teljes* részhalmaza a $\mathcal{H}$ prehilbert térnek, vagyis K teljes metrikus tér a $\mathcal{H}$ normájából származtatott metrika K-ra vett megszorításával. Speciálisan a fenti állítás következtése igaz marad abban az esetben is, amikor K olyan konvex zárt részhalmaza egy E prehilbert térnek, hogy a K által generált $\mathrm{span}(K)$ lineáris altér véges dimenziós, vagy amikor K kompakt konvex részhalmaza E-nek.

A 3.16 Tétel alkalmazásával igazolható a Hilbert-terek geometriai elméletének legfontosabb eredménye, az ún. *Riesz-féle felbontási tétel*:

3.18. Riesz-féle felbontási tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen H zárt lineáris altere $\mathcal{H}$-nak. Ekkor $\mathcal{H}$ előáll*

$$\mathcal{H} = H \oplus H^\perp, \tag{3.6}$$

direktösszeg alakban, azaz tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ vektor egyértelműen előáll $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in H$ és $x_2 \in H^\perp$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathcal{H}$ rögzített pont. Könnyen látható, hogy csak egyetlen olyan $(x_1, x_2) \in H \times H^\perp$ vektorpár létezhet, amelyre $x = x_1 + x_2$. Valóban, ha $(x_1', x_2') \in H \times H^\perp$ is ilyen pár, akkor fennáll a

$$H \ni x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in H^\perp$$

egyenlőség, ugyanakkor könnyen látható, hogy $H \cap H^\perp = \{0\}$, amiből az egyértelműség már következik.

Mivel H zárt konvex részhalmaza a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek, azért a 3.16 Tétel szerint tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ vektorhoz egyértelműen létezik olyan $x_1 \in H$, amelyre

$$d_H(x) = \|x - x_1\|.$$

A tétel állítása igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy az $x_2 := x - x_1$ vektorra $x_2 \in H^\perp$ teljesül. Legyen tehát $y \in H$ tetszőleges rögzített pont, azt kell igazolnunk, hogy $(x_2 \,|\, y) = 0$. Ehhez vezessük be az alábbi

$$p(t) := \|x - (x_1 + ty)\|^2, \qquad t \in \mathbb{R}$$

egyenlőséggel értelmezett $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(t) = \|x_2\|^2 - 2t\,\mathfrak{Re}(x_2 \,|\, y) + t^2\|y\|^2.$$

Mivel minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $x_1 + ty \in H$, azért az $x_1 \in H$ vektor értelmezése alapján

$$p(t) = \|x - (x_1 + ty)\|^2 \geq d_H(x)^2 = \|x - x_1\|^2 = p(0),$$

ami éppen azt jelenti, hogy a p függvénynek minimuma van a 0 pontban. Következésképp,

$$0 = p'(0) = -2\,\mathfrak{Re}(x_2 \,|\, y).$$

Ebből $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben azonnal kapjuk az állítást. A $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben $y \in H$ mellett az $iy \in H$ vektorra is alkalmazhatjuk a fenti érvelést, amiből

$$0 = \mathfrak{Re}(x_2 \,|\, iy) = \mathfrak{Re}\Big[-i(x_2 \,|\, y)\Big] = \mathfrak{Im}(x_2 \,|\, y)$$

adódik, azaz $(x_2 \,|\, y) = 0$. ■

3.19. Definíció. Legyen H zárt lineáris altere a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek, akkor a (3.6) felbontást a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér H zárt altér szerinti *ortogonális felbontásának* nevezzük. Ha $x \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor, $(x_1, x_2) \in H \times H^\perp$ pedig az az egyértelműen meghatározott vektorpár, amelyre $x = x_1 + x_2$ teljesül, akkor az x_1 (illetve x_2) vektort az x H-ra (illetve $H^\perp$-re) vett *merőleges vetületének*, vagy *ortogonális projekciójának* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy ha E tetszőleges vektortér, akkor minden $F \subseteq E$ lineáris altérhez van olyan $F' \subseteq E$ altér, amely mellett E előáll az alábbi

$$E = F \oplus F'$$

algebrai direkt összeg alakban. Ugyanakkor, a triviális esetektől eltekintve az F altérhez végtelen sok olyan F' altér létezik, amely mellett E előáll a fenti direkt összeg alakban. Ezzel szemben egy $\mathcal{H}$ Hilbert-tér bármely H zárt alteréhez csupán egyetlen olyan H' zárt altér létezik, amely *ortogonális* H-ra és amely mellett $\mathcal{H}$ előáll $\mathcal{H} = H \oplus H'$ alakban, éspedig a Riesz-féle felbontási tétel szerint $H' = H^\perp$.

Az alábbiakban megvizsgáljuk a Riesz-féle felbontási tétel néhány fontosabb geometriai következményét.

3.20. Állítás. *Legyen H zárt lineáris altere a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek, ekkor*

$$H = H^{\perp\perp}.$$

Bizonyítás. A 3.14 Állítás (c) pontjának értelmében a $H \subseteq H^{\perp\perp}$ tartalmazás bármely H halmaz esetén fennáll, ezért elegendő a $H^{\perp\perp} \subseteq H$ tartalmazást igazolni. Legyen $x \in H^{\perp\perp}$, ekkor a Riesz-féle felbontási tétel értelmében egyértelműen léteznek olyan $x_1 \in H$ és $x_2 \in H^\perp$ vektorok, hogy $x = x_1 + x_2$, ekkor $x - x_1 \in H^{\perp\perp}$, hiszen $x_1 \in H \subseteq H^{\perp\perp}$ és $x \in H^{\perp\perp}$, és $H^{\perp\perp}$ lineáris altere $\mathcal{H}$-nak. Ugyanakkor, $x - x_1 = x_2 \in H^\perp$ is teljesül, vagyis

$$x - x_1 \in H^\perp \cap H^{\perp\perp} = \{0\},$$

következésképp $x = x_1 \in H$, amivel megmutattuk, hogy a $H^{\perp\perp} \subseteq H$ tartalmazás is fennáll. ■

3.21. Következmény. *Legyen M tetszőleges részhalmaza a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek. Ekkor*

$$M^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span} M}.$$

Bizonyítás. A 3.15 Állítás szerint fennáll a $[\overline{\operatorname{span} M}]^\perp = M^\perp$ azonosság, azért a bizonyítandó azonosság következik a 3.20 Állításból. ■

3.22. Állítás. *Legyen H zárt lineáris altere a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $H = \mathcal{H}$,
(ii) $H^\perp = \{0\}$.

Bizonyítás. A Riesz-féle felbontási tétel szerint a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér előáll $\mathcal{H} = H \oplus H^\perp$ direkt összeg alakban. Ha $H^\perp = 0$, akkor ez csak akkor lehetséges, ha $H = \mathcal{H}$. Megfordítva, ha $H = \mathcal{H}$, akkor nyilvánvaló, hogy $H^\perp = \{0\}$. ■

3.23. Következmény. *Ha H valódi zárt lineáris altere a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek, akkor létezik olyan $x \in \mathcal{H}, x \neq 0$ vektor, amely ortogonális H minden elemére.*

3.3. Ortogonális rendszerek és ortogonális sorok

Az alábbiakban definiáljuk a Fourier-sorok elméletének két alapvető fogalmát, amelyek közül az elsőnek bármely normált térben, a másodiknak csak prehilbert (és így természetesen Hilbert) térben lesz értelme.

3.24. Definíció. Az E normált tér egy M részhalmazát *totálisnak* nevezzük, ha az M halmaz lineáris burka sűrű E-ben, vagyis ha

$$E = \overline{\operatorname{span} M}.$$

3.25. Definíció. Az E prehilbert tér egy M részhalmazát *teljesnek* mondjuk, ha a nulla vektoron kívül nincs más olyan E-beli vektor, amely ortogonális M-re, vagyis ha

$$M^\perp = \{0\}.$$

Természetesen egy halmaz teljességének a fenti definícióban megadott fogalma semmilyen kapcsolatban nincs a metrikus terek teljességének fogalmával.

3.26. Tétel. *A $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy M részhalmaza pontosan akkor totális, ha teljes.*

Bizonyítás. Az értelmezés szerint az M halmaz teljessége azt jelenti, hogy $M^\perp = \{0\}$. Mivel a 3.15 Állítás szerint

$$M^\perp = \left[\overline{\operatorname{span} M}\right]^\perp$$

teljesül, azért M teljessége egyenértékű azzal, hogy $[\overline{\operatorname{span} M}]^\perp = \{0\}$. Ez viszont a 3.22 Állítás szerint azt jelenti, hogy $\overline{\operatorname{span} M} = \mathcal{H}$, vagyis M totális halmaz $\mathcal{H}$-ban. ■

Az előzőekben láttuk, hogy prehilbert (speciálisan Hilbert) térben a skalárszorzat segítségével definiálható a merőlegesség (más néven ortogonalitás) fogalma. Speciálisan, lehetőség van ortogonális sorozatokat és ortogonális sorokat értelmezni. Az alábbi fejezetben ezek általános tulajdonságait vizsgáljuk meg, és egyúttal betekintést engedünk az *absztrakt Fourier-sorok* elméletébe.

3.27. Definíció. Legyen E prehilbert tér. Az E-ben haladó $(x_i)_{i\in\mathscr{I}}$ rendszert *ortogonálisnak* nevezzük, ha minden $i, j \in \mathscr{I}$, $i \neq j$ indexre $(x_i \,|\, x_j) = 0$. Ha $\mathscr{I} = \mathbb{N}$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális rendszert *ortogonális sorozatnak*, az ortogonális sorozatokhoz asszociált sorokat *ortogonális soroknak* nevezzük.

A következő egyszerű tételt gyakran felhasználjuk az alábbiakban:

3.28. Állítás. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó olyan sorozat, hogy a belőle származtatott sor konvergens. Ha x jelöli az illető sor összegét, akkor tetszőleges $y \in \mathcal{H}$ mellett*

$$(x \,|\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n \,|\, y).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló abból, hogy bármely rögzített $y \in \mathcal{H}$ mellett a $(\cdot \,|\, y)$ parciális függvény folytonos lineáris funkcionál. ■

Megjegyezzük, hogy ha E prehilbert tér és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ véges sok E-beli egymásra páronként merőleges vektorok, akkor fennáll az alábbi *Pithagorasz-tétel*:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Valóban, a skaláris szorzat disztributivitásának felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_i \,|\, x_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \,|\, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Ennek messzemenő általánosítását fogalmazza meg az alábbi ún. *Parseval-tétel*, amely egyúttal szükséges és elégséges feltételt is nyújt ortogonális sorok konvergenciájára:

3.29. Parseval-tétel. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó ortogonális sorozat. Az alábbi két kijelentés ekvivalens:*

(i) *a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ortogonális sor konvergens,*

(ii) *a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ numerikus sor konvergens.*

Továbbá a fenti két feltétel bármelyike mellett fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Bizonyítás. Jelölje $n \in \mathbb{N}$ esetén s_n a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, S_n pedig a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ sor n-edik részletösszegét. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\|s_n - s_m\| = \sqrt{|S_n - S_m|}. \tag{3.7}$$

Tegyük fel először, hogy $n > m$, ekkor $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} x_n$, így a Pithagorasz-tétel szerint

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|x_n\|^2 = S_n - S_m.$$

Ebből már egyszerű meggondolásokkal következik, hogy a (3.7) egyenlőség tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén fennáll.

A (3.7) egyenlőségből már leolvasható, hogy az $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, ha az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozat Cauchy-sorozat. Ebből pedig a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, illetve $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ sorok értelmezése, valamint a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér teljessége miatt az (i) és (ii) kijelentések ekvivalenciája már következik. Végül, az (i), illetve (ii) állítások bármelyikének teljesülése esetén az elemi Pithagorasz-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right\|^2 = \left\|\lim_{n\to\infty} s_n\right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|s_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

■

3.30. Definíció. Az E prehilbert térben haladó $(e_i)_{i\in\mathscr{I}}$ rendszert *ortonormált rendszernek* nevezzük, ha ortogonális, és minden $i \in \mathscr{I}$ esetén $\|e_i\| = 1$. Ha $\mathscr{I} = \mathbb{N}$, akkor az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortognormált rendszert *ortonormált sorozatnak* nevezzük.

A továbbiakban kizárólag csak

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n \tag{3.8}$$

alakú sorokkal alakú ortogonális sorokkal foglalkozunk, ahol $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó *ortonormált* sorozat, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pedig egy $\mathbb{K}$-beli számsorozat, amelynek tagjait a szóban forgó ortogonális sor *együtthatóinak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy a (3.8) alatti sor valóban ortogonális sor, hiszen tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ esetén

$$(\alpha_n e_n \,|\, \alpha_m e_m) = \alpha_n \overline{\alpha_m} (e_n \,|\, e_m) = 0.$$

Könnyen látható továbbá, hogy tetszőleges ortogonális sor felírható a fenti (3.8) alakban. Ha ugyanis $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ egy ortogonális sor (ahol nyilván feltehető, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ mellett $x_n \neq 0$), akkor minden $n \in \mathbb{N}$ mellett az

$$\alpha_n := \|x_n\|, \qquad e_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

jelölések bevezetésével az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nyilvánvalóan ortonormált, a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sorok pedig megegyeznek.

A fenti Parseval-tételt érdemes külön is megfogalmazni (3.8) alakú ortogonális sorok esetére:

3.31. Tétel. *Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó ortonormált sorozat, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pedig $\mathbb{K}$-beli numerikus sorozat. A* (3.8) *alakú ortogonális sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ sor konvergens. Ha emellett x jelöli a* (3.8) *sor összegét, azaz*

$$x := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

akkor a sor együtthatói minden $n \in \mathbb{N}$ estén előállíthatók az x vektor segítségével az

$$\alpha_n = (x \,|\, e_n) \tag{3.9}$$

alakban, továbbá az x vektorra fennáll az alábbi Parseval-egyenlőség:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2. \tag{3.10}$$

Bizonyítás. A Parseval-tétel szerint a (3.8) alatti ortogonális sor pontosan akkor konvergens, ha a tagok normáinak négyzetösszege konvergens, vagyis ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Ha a (3.8) ortogonális sor konvergens és x jelöli az összegét, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett a 3.28 Állítás felhasználásával

$$(x \mid e_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k e_k \mid e_n) = \alpha_n (e_n \mid e_n) = \alpha_n,$$

amivel a (3.9) összefüggést igazoltuk. Végül a (3.10) Parseval-egyenlőség következik a már bizonyított Parseval-tételből $x_n := \alpha_n e_n$ választással. ■

A fenti Parseval-tétel nyilvánvaló következményeként kapjuk a Fourier-együtthatók egyértelműségéről szóló alábbi eredményt:

3.32. Következmény. *Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó ortonormált sorozat, legyenek továbbá $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$-beli numerikus sorozatok. Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n e_n$ ortogonális sorok konvergensek, továbbá az összegükre fennáll a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e_n$$

egyenlőség, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ mellett $\alpha_n = \beta_n$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző tétel (3.9) formulájából. ■

3.33. Definíció. Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó ortonormált sorozat. Egy tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ esetén rögzített $n \in \mathbb{N}$ mellett az $(x \mid e_n)$ számot az x vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat szerinti n-edik *Fourier-együtthatójának* nevezzük. A Fourier-együtthatókból képezett alábbi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (x \mid e_n) e_n \tag{3.11}$$

ortogonális sort az x vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozatra vonatkozó *Fourier-sorfejtésének* nevezzük.

A Fourier-sor fenti értelmezéséből közvetlenül még nem látható, hogy minden $\mathcal{H}$ Hilbert-térbeli x vektornak az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszer szerinti Fourier-sora konvergens volna (amit egyébként a későbbiekben igazolni fogunk). Ha azonban $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan numerikus sorozat, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ ortogonális sor konvergens, akkor a 3.31 Tétel szerint a sor együtthatói előállíthatók a (3.9) egyenlőséggel, vagyis ha x jelöli a kérdéses sor összegét, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re teljesül az $\alpha_n = (x \mid e_n)$ egyenlőség. Ebből látható, hogy a sor együtthatói azonosak az x vektornak az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatóival, tehát a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ ortogonális sor azonos az összegének a Fourier-sorával, és természetesen ekkor az illető Fourier-sor is konvergens.

3.34. Bessel-egyenlőtlenség. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pedig $\mathcal{H}$-beli ortonormált sorozat. Ekkor tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$-re vonatkozó Fourier sora konvergens, továbbá fennáll az alábbi ún. Bessel-egyenlőtlenség:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x \mid e_n)|^2 \le \|x\|^2. \tag{3.12}$$

Bizonyítás. Vezessük be $n \in \mathbb{N}$ mellett az $\alpha_n := (x \mid e_n)$ és az $s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k$ jelöléseket. Ekkor

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - (x \mid s_n) - (s_n \mid x) + \|s_n\|^2, \tag{3.13}$$

ahol az elemi Pithagorasz-tétel szerint $\|s_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2$, továbbá

$$(x \mid s_n) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha}_k (x \mid e_k) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha}_k \alpha_k = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2 = (s_n \mid x).$$

Ezeket a (3.13) egyenlőségbe beírva kapjuk, hogy teszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2 = \|x - s_n\|^2 \ge 0$$

teljesül, amiből a (3.12) egyenlőtlenség, és így a Parseval-tétel alapján egyúttal a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ ortogonális sor konvergenciája is következik. ∎

Az alábbiakban megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy milyen összefüggés van egy adott $x \in \mathcal{H}$ vektor Fourier-sorának összege és az x vektor között. Ehhez jelölje H az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat tagjaiból álló halmaz lineáris burkának lezárását, vagyis

$$H := \overline{\operatorname{span}\{e_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}}.$$

3.35. Tétel. *Bármely $x \in \mathcal{H}$ vektornak az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat szerinti Fourier-sorösszege azonos az x vektornak az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszer által kifeszített H zárt altérre való merőleges vetületével.*

Bizonyítás. Vezessük be $n \in \mathbb{N}$ mellett az $\alpha_n := (x \mid e_n)$ jelölést. Az előző tétel szerint az x Fourier-sora konvergens, jelölje u annak összegét:

$$u := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Ha s_n jelöli a Fourier-sor n-edik részletösszegét, akkor $s_n \to u$ és $s_n \in H$ miatt világos, hogy $u \in H$. Másrészt a 3.31 Tétel szerint $\alpha_n = (u \mid e_n)$, így $v := x - u$ jelölést alkalmazva kapjuk, hogy

$$(v \mid e_n) = (x \mid e_n) - (u \mid e_n) = \alpha_n - \alpha_n = 0$$

minden $n \in \mathbb{N}$ mellett, vagyis $v \in \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}^\perp = H^\perp$. A v vektor értelmezéséből világos, hogy $x = u + v$, ahol $u \in H$ és $v \in H^\perp$, így az ortogonális felbontás egyértelműsége miatt u megegyezik az x vektor H-ra vett merőleges vetületével. ∎

A következő definíció alapvető fontosságú a Fourier-sorok elméletében:

3.36. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{H}$-beli ortonormált sorozat. Egy $x \in \mathcal{H}$ vektort $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerint *Fourier-sorba fejthető*nek nevezünk, ha az x vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerinti Fourier-sorának összege azonos x-szel.

Az előző tétel nyilvánvaló következménye az alábbi eredmény:

3.37. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{H}$-beli ortonormált sorozat. Az $x \in \mathcal{H}$ vektor pontosan akkor fejthető Fourier-sorba az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat szerint, ha x benne van az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tagjai által feszített zárt lineáris altérben.*

A Fourier-sorok további vizsgálatához szükségünk lesz az 3.24 és 3.25 definíciók ortonormált sorozatokra való természetes átfogalmazására:

3.38. Definíció. Az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó ortonormált sorozatot totálisnak (illetve teljesnek) nevezzük, ha az

$$M := \{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

halmaz totális (illetve teljes).

Az értelmezés szerint tehát az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat totális, ha

$$\overline{\operatorname{span}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H},$$

és teljes, ha abból, hogy valamely $x \in \mathcal{H}$ vektorra $(x \,|\, e_n) = 0$ minden $\mathbb{N} \ni n$-re, következik, hogy $x = 0$.

A 3.26 Tételből nyilvánvalóan következik az alábbi fontos eredmény:

3.39. Állítás. *Egy Hilbert-térben haladó ortonormált sorozat pontosan akkor totális, ha teljes.*

A bevezetett fogalmak figyelembevételével és az 3.37 Állításból azonnal követekezik az alábbi nevezetes

3.40. Tétel. *A $\mathcal{H}$ Hilbert-térben pontosan akkor lesz minden x vektor Fourier-sorba fejthető az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat szerint, ha $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ totális (vagy ami ugyanaz, ha $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes).*

Könnyen ellenőrizhető, hogy egy normált tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható totális halmaz. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy egy Hilbert-tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne totális (vagy ami ugyanaz, teljes) ortonormált sorozat. Ehhez felhasználjuk az ún. *Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást*:

3.41. Állítás. *Ha E prehilbert tér és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineárisan független vektorokból álló E-beli sorozat, akkor létezik olyan E-ben haladó $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat, hogy bármely n természetes szám mellett az $y_0, y_1, \ldots, y_n$ és $e_0, e_1, \ldots, e_n$ vektorok által kifeszített alterek azonosak, vagyis*

$$\operatorname{span}\{y_0, y_1, \ldots, y_n\} = \operatorname{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Bizonyítás. A bizonyítást rekurzióval végezzük. Az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra tett feltevés alapján világos, hogy $y_0 \neq 0$. Jelölje tehát $e_0 := \frac{y}{\|y\|}$. A $\lambda := (y_1 \,|\, e_0)$ választással világos, hogy $x_1 := y_1 - \lambda e_0$ olyan nem-nulla vektor, amelyre

$$(x_1 \,|\, e_0) = (y_1 \,|\, e_0) - \lambda(e_0 \,|\, e_0) = 0,$$

vagyis $x_1 \perp e_0$. Ezért $e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$ olyan egy normájú vektor, hogy $e_0 \perp e_1$, valamint az y_0, y_1 és e_0, e_1 vektorok által kifeszített alterek azonosak. Tegyük fel ezután, hogy $e_0, e_1, \ldots, e_n$ páronként egymásra merőleges egységvektorok, hogy bármely $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén az $e_0, e_1, \ldots, e_k$ és $y_0, y_1, \ldots, y_k$ vektorok által kifeszített alterek azonosak. A $\lambda_k := (y_{n+1} \,|\, e_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ számok bevezetése mellett tekintsük az

$$x_{n+1} := y_{n+1} - \lambda_0 e_0 - \lambda_1 e_1 - \ldots - \lambda_n e_n$$

vektort, mely az $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$ vektorok függetlensége miatt nem nulla, továbbá bármely $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén $x_{n+1} \perp e_k$, ugyanis

$$(x_{n+1} \,|\, e_k) = (y_{n+1} \,|\, e_k) - \lambda_k (e_k \,|\, e_k) = 0.$$

Következésképp kapjuk, hogy $e_{n+1} := \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|}$ választással $e_0, \ldots, e_n, e_{n+1}$ olyan egymásra páronként merőleges egységvektorok, amelyek által kifeszített altér megegyezik az $y_0, \ldots, y_n, y_{n+1}$ vektorok által kifeszített altérrel. Az állításban előírt $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezése a rekurzióval adódik. ■

3.42. Következmény. *Bármely végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-térben létezik teljes ortonormált sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert-tér és legyen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathcal{H}$-ban haladó sorozat, hogy az $\{y_n \,|\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ halmaz totális. A feltétel szerint $\mathcal{H}$ végtelen dimenziós, azért a Zorn-lemma egy egyszerű alkalmazásával kiválasztható az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatból olyan $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ lineárisan független vektorokból álló részsorozat, hogy az $\{y_{n_k} \,|\, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ halmaz totális. A 3.41 Állítás szerint létezik olyan $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat $\mathcal{H}$-ban, hogy

$$\operatorname{span}\{y_{n_0}, y_{n_1}, \ldots\} = \operatorname{span}\{e_0, e_1, \ldots\},$$

amiből következik, hogy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ totális, következésképp teljes ortonormált sorozat. ■

Legyen $\mathcal{H}$ végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér és rögzítsünk abban egy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált sorozatot. Legyen $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy ℓ^2-beli vektor, akkor a 3.31 Parseval-tétel szerint a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ sor konvergens $\mathcal{H}$-ban és az összegére fennáll a

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n \Big\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

egyenlőség. Vezessük be az alábbi

$$T(\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n, \qquad \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

egyenlőséggel értelmezett $T : \ell^2 \to \mathcal{H}$ nyilvánvalóan lineáris operátort, akkor a fentiek szerint fennáll, hogy

$$\|T\alpha\| = \|\alpha\|_2, \qquad \alpha \in \ell^2,$$

amiből következik, hogy T folytonos, sőt izometria. Másfelől ha $x \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges vektor, akkor a 3.40 Tétel szerint x Fourier-sorba fejthető $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerint, vagyis x előáll

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n) e_n$$

alakban. Következésképp $\alpha_n := (x \mid e_n)$ választással $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan ℓ^2-beli sorozat, amelyre $T\alpha = x$. Ezzel megmutattuk, hogy T szürjektív is, vagyis T *izometrikus izomorfizmust* létesít ℓ^2 és $\mathcal{H}$ között, amivel igazoltuk az alábbi fontos eredményt:

3.43. Tétel. *Bármely végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér izometrikusan izomorf az ℓ^2 sorozattérrel.*

3.4. Gyenge konvergencia Hilbert-téren

Az alábbiakban bevezetünk egy új konvergencia fogalmat, éspedig az ún. *gyenge konvergenciát.*

3.44. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor egy $\mathcal{H}$-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot *gyengén konvergensnek* nevezünk, ha létezik olyan $x \in \mathcal{H}$ vektor, hogy minden $y \in \mathcal{H}$ vektorra $(x_n \mid y) \to (x \mid y)$ teljesül, továbbá ilyenkor az x vektort az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat gyenge limeszének nevezünk.

Az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy egy sorozatnak legfeljebb egy gyenge limesze lehet. Valóban, ha x és $x' \in \mathcal{H}$ mindketten az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat gyenge limeszei, akkor bármely $y \in \mathcal{H}$ esetén

$$(x \mid y) = \lim_{n\to\infty} (x_n \mid y) = (x' \mid y),$$

amiből az $x = x'$ egyenlőség következik.

Az alábbi egyszerű állítás a norma szerinti konvergencia és a gyenge konvergencia kapcsolatát tisztázza:

3.45. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathcal{H}$-ban haladó sorozat, amely norma szerint konvergál az $x \in \mathcal{H}$ vektorhoz, akkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gyengén is konvergál x-hez.*

Bizonyítás. A feltétel szerint $\|x_n - x\| \to 0$, ezért bármely $y \in \mathcal{H}$ esetén a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség szerint

$$|(x_n \mid y) - (x \mid y)| = |(x_n - x \mid y)| \leq \|x_n - x\|\|y\| \to 0,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gyengén tart x-hez. ∎

Az előző állítás alapján egy normában konvergens sorozat gyengén is konvergens, ugyanazzal a határértékkel. Az alábbi példában megmutatjuk, hogy ennek a megfordítása végtelen dimenziós tér esetén nem igaz:

3.46. Állítás. *Hilbert-térben bármely ortonormált sorozat gyengén konvergál a nulla vektorhoz.*

Bizonyítás. Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó ortonormált sorozat és legyen $y \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges vektor, akkor a Bessel-egyenlőtlenség szerint a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |(e_n \mid y)|^2$ numerikus sor konvergens, ezért szükségképp $(e_n \mid y) \to 0$, vagyis $e_n \to 0$ gyengén. ∎

A fenti példa szerint egy sorozat gyenge konvergenciájából nem következtethetünk annak norma szerinti konvergenciájára. Ugyanakkor igaz a következő állítás:

3.47. Állítás. *Egy $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor tart norma szerint az $x \in \mathcal{H}$ vektorhoz, ha $x_n \to x$ gyengén, és $\|x_n\| \to \|x\|$.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathcal{H}$-beli sorozat, hogy $x_n \to x$ gyengén, és $\|x_n\| \to \|x\|$ valamely $x \in \mathcal{H}$ vektorra, akkor a feltétel szerint egyúttal $(x_n \,|\, x) \to (x \,|\, x)$, ezért így

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - (x_n \,|\, x) - (x \,|\, x_n) + \|x_n\|^2 \to 0,$$

vagyis $x_n \to x$ a $\mathcal{H}$ normája szerint. A fordított irányú implikáció nyilvánvaló. ∎

3.48. Lemma. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó korlátos sorozat, és legyen $x \in \mathcal{H}$. Legyen továbbá M a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges részhalmaza és jelölje H az M által generált zárt lineáris alteret $\mathcal{H}$-ban. Az alábbi két kijelentés egyenértékű:*

(i) *minden $y \in M$ esetén $(x_n \,|\, y) \to (x \,|\, y)$,*
(ii) *minden $y \in H$ esetén $(x_n \,|\, y) \to (x \,|\, y)$.*

Bizonyítás. Az (ii)⇒(i) irány nyilvánvaló, ezért elegendő annak megfordítását igazolnunk. A skalárszorzás linearitásából világos, hogy (i) mellett minden $y \in \operatorname{span} M$ vektorra $(x_n \,|\, y) \to (x \,|\, y)$ teljesül, emiatt feltehető, hogy M lineáris altere $\mathcal{H}$-nak. Legyen tehát $y \in \overline{M}$ és legyen $\varepsilon > 0$. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátossága alapján rögzítsünk egy $C > 0$ számot, hogy $\|x_n\| \le C$ $(n \in \mathbb{N})$, továbbá az y vektorhoz válasszunk egy olyan $z \in M$ vektort, hogy $\|y-z\| < \frac{\varepsilon}{3C}$. Mivel $|(x_n \,|\, z)-(x \,|\, z)| \to 0$, azért létezik olyan n_0 küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ esetén $|(x_n - x \,|\, z)| < \varepsilon/3$. Ezek felhasználásával kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ mellett fennáll, hogy

$$\begin{aligned}|(x_n \,|\, y) - (x \,|\, y)| &= |(x_n \,|\, y - z) + (x_n - x \,|\, z) + (x \,|\, z - y)| \\ &\le \|x_n\|\|y - z\| + \|x_n - x\|\|z\| + \|x\|\|z - y\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $(x_n \,|\, y) \to (x \,|\, y)$. ∎

Könnyen igazolható, hogy egy végtelen dimenziós Hilbert-térben nincs olyan pozitív sugarú zárt gömb, amely kompakt volna. Másképp fogalmazva, egy Hilbert-térben haladó korlátos sorozatnak nem feltétlenül létezik konvergens részsorozata. Igaz azonban a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel alábbi „gyenge” változata:

3.49. Tétel. *Tetszőleges Hilbert-térben haladó korlátos sorozatnak létezik gyengén konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó korlátos sorozat, és rögzítsünk egy olyan $C \ge 0$ számot, hogy $\|x_n\| \le C$, $(n \in \mathbb{N})$. Jelölje H az $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ rendszer által feszített zárt lineáris alteret. Vegyük észre, hogy ha ez az altér véges dimenziós, akkor a Bolzano-Weierstrass tétel szerint a kérdéses sorozatból még *normában konvergens* részsorozat is kiválasztható, vagyis ebben az esetben az állítás nyilvánvaló. Elegendő tehát azt az esetet vizsgálnunk, amikor H végtelen dimenziós. A 3.42 Következmény szerint létezik H-ban teljes ortonormált sorozat, legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy ilyen.

A feltétel szerint az $n \mapsto (x_n \,|\, e_0)$ sorozat korlátos, ui. bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|(x_n \,|\, e_0)| \le \|x_n\| \le C,$$

ezért a Bolzano–Weirstrass-tétel értelmében kiválasztható belőle konvergens részsorozat, vagyis létezik olyan $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, és $\alpha_0 \in \mathbb{K}$, hogy $(x_{\sigma_0(n)} \,|\, e_0) \to \alpha_0$. Hasonlóképp, az $n \mapsto (x_{\sigma_0(n)} \,|\, e_1)$ sorozat is korlátos, ezért ismét a Bolzano–Weierstrass tétel értelmében létezik olyan $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, és $\alpha_1 \in \mathbb{K}$, hogy $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \tau$ jelöléssel $(x_{\sigma_1(n)} \,|\, e_1) \to \alpha_1$ teljesül. Az eddigiek figyelembevételével $(x_{\sigma_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ olyan részsorozata az eredetinek, amelyre

$$(x_{\sigma_1(n)} \,|\, e_k) \to \alpha_k, \qquad (k = 0, 1).$$

Ezt az eljárást folytatva, rekurzióval kapjuk olyan $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ és $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatok létezését, ahol minden k-ra $\sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, $\alpha_k \in \mathbb{K}$, továbbá minden $j = 0, 1, \ldots, k$ mellett $(x_{\sigma_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ az $(x_{\sigma_j(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan részsorozata, amelyre fennáll, hogy

$$(x_{\sigma_k(n)} \,|\, e_j) \to \alpha_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Könnyen látható, hogy a $\sigma(n) := \sigma_n(n)$ hozzárendeléssel értelmezett $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény szigorúan monoton növő, emellett teljesül rá, hogy

$$(x_{\sigma(n)} \,|\, e_k) \to \alpha_k, \qquad k = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.14}$$

Megmutatjuk, hogy az $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat gyengén konvergens, éspedig

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k \tag{3.15}$$

gyenge limesszel. (Itt egyelőre az sem világos, hogy a fenti ortogonális sor valóban konvergens-e). A (3.15) alatti ortogonális sor konvergenciájához a 3.31 Parseval-tétel szerint elegendő azt megmutatni, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k|^2$ numerikus sor korlátos. Ennek igazolásához rögzítsünk egy $m \in \mathbb{N}$ indexet, akkor (3.14) valamint a 3.34 Bessel-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{m} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=0}^{m} \lim_{n\to\infty} |(x_{\sigma(n)} \,|\, e_k)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} |(x_{\sigma(n)} \,|\, e_k)|^2 \le \limsup_{n\to\infty} \|x_{\sigma(n)}\|^2 \le C^2,$$

amiből a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k|^2$ sor korlátossága és egyúttal a (3.15) sor konvergenciája adódik. Ha x jelöli a (3.15) alatti sor összegét, akkor az eddigiek alapján minden rögzített k-ra $(x_{\sigma(n)} \,|\, e_k) \to \alpha_k$, továbbá az x vektor értelmezése alapján $(x \,|\, e_k) = \alpha_k$, következésképp

$$(x_{\sigma(n)} \,|\, e_k) \to (x \,|\, e_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

A 3.48 Lemma alapján $(x_{\sigma(n)} \,|\, y) \to (x \,|\, y)$ minden $y \in H$ vektorra is. A bizonyítás befejezéséhez elegendő azt megmutatnunk, hogy tetszőleges $u \in H^\perp$ vektorra

$$(x_{\sigma(n)} \,|\, u) \to (x \,|\, u) = 0,$$

ami viszont nyilvánvalóan teljesül, hiszen minden n-re $x_{\sigma(n)} \in H$. ■

3.5. Folytonos lineáris funkcionálok Hilbert-téren

A funkcionálanalízis egyik alapvető problémaköre - és ahhonnan a tudományterület neve is származik - az egyes normált terek ún. *topologikus duálisának*, azaz a tér folytonos lineáris funkcionáljainak leírása. Korábban láttuk, hogy tetszőleges E prehilbert tér esetén bármely $z \in E$ mellett az

$$f_z(x) := (x \,|\, z), \qquad x \in E$$

egyenlőséggel értelmezett $f_z : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál folytonos, és fennáll a $\|f_z\| = \|z\|$ egyenlőség. Ez egyúttal azt jelenti, hogy a

$$T : E \to E', \qquad z \mapsto f_z \tag{3.16}$$

(konjugáltan lineáris) leképezés izomteria. Tehát minden prehilbert tér folytonosan beágyazható a saját duális terébe a fenti természetes T leképezés által. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy Hilbert-terek esetén a fenti leképezés *szürjekció* is. Másszóval, minden Hilbert-tér a (3.16) alatti T leképezésen keresztül kitüntetett módon azonosul a saját topologikus duális terével - ez az ún. *Riesz-féle reprezántációs tétel.* A Hilbert-terekre vonatkozó mélyebb eredmények jelentős része ezen a rendkívül erős egzisztencia tételen múlik.

3.50. A Riesz-féle reprezentációs tétel. *Legyen f folytonos lineáris funkcionál a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. Ekkor egyértelműen létezik olyan $z \in \mathcal{H}$ vektor, amelyre $f = f_z$ teljesül, vagyis amelyre minden $x \in \mathcal{H}$ esetén*

$$f(x) = (x \,|\, z). \tag{3.17}$$

Bizonyítás. Az f lineáris funkcionál folytonos, ezért a $\ker f$ halmaz zárt altere $\mathcal{H}$-nak. Világos, hogy $\ker f = \mathcal{H}$ esetén $z = 0$ választással az $f = f_z$ egyenlőség triviálisan teljesül, ezért feltehető, hogy $\ker f$ valódi altere $\mathcal{H}$-nak. Ekkor a Riesz-féle felbontási tétel 3.22 Következménye szerint $(\ker f)^\perp \neq \{0\}$, így az tartalmaz nem nulla vektort. Legyen tehát $y \in (\ker f)^\perp$, $y \neq 0$ tetszőleges vektor, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $u := f(x)y - f(y)x$ választás mellett

$$f(u) = f(x)f(y) - f(y)f(x) = 0,$$

vagyis $u \in \ker f$. Ezért $y \in (\ker f)^\perp$ figyelembevételével

$$0 = (u \,|\, y) = f(x)\|y\|^2 - f(y)(x \,|\, y),$$

amiből átrendezés után nyerjük, hogy

$$f(x) = \frac{f(y)}{\|y\|^2}(x \,|\, y) = \left(x \,\middle|\, \frac{\overline{f(y)}}{\|y\|^2} y \right),$$

vagyis $z := \frac{\overline{f(y)}}{\|y\|^2} y$ választás mellett tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ esetén fennáll a (3.17) egyenlőség, amivel a tétel egzisztencia részét igazoltuk.

A reprezentáns vektor egyértelműségéhez tegyük fel, hogy $f_y = f_z$ teljesül valamely $y, z \in \mathcal{H}$ vektorokra, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ vektor esetén

$$(x \,|\, y) = (x \,|\, z),$$

amit átrendezve kapjuk, hogy $y - z \in \mathcal{H}^\perp$, és ezért $y = z$. ■

3.51. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ prehilbert tér, akkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

(i) *$\mathcal{H}$ Hilbert-tér.*
(ii) *A $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}', z \mapsto f_z$ leképezés szürjektív.*

Bizonyítás. A (ii) feltevés mellett $\mathcal{H}$ izometrikusan izomorf a topologikus duálisával, amely teljes, hisz tetszőleges normált tér topologikus duálisa Banach-tér. Következésképp az $\mathcal{H}$ maga is teljes. A megfordítás pedig a 3.12 Állításból és a 3.50 Riesz-féle reprezentációs tételből egyszerűen következik. ■

3.52. Következmény. *Legyen M lineáris altere a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek, és legyen $f_0 : M \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionál. Ekkor egyértelműen létezik olyan $z \in \overline{M}$ vektor, hogy*

$$f_z|_M = f_0,$$

továbbá fennáll az $\|f_0\| = \|f_z\| = \|z\|$ egyenlőség, vagyis $f_z \in \mathcal{H}'$ az f_0 norma tartó kiterjesztése.

Bizonyítás. Világos, hogy M sűrű altere $\overline{M}$-nak, így f egyértelműen kiterjed $\overline{M}$-ra a norma (speciálisan, a folytonosság) és a linearitás megtartásával. Alkalmazható tehát a Riesz-féle reprezentációs tétel erre a kiterjesztett funkcionálra, és az $\overline{M}$ Hilbert-térre, amely szerint létezik egyetlen $z \in \overline{M}$ vektor, amelyre teljesül, hogy

$$f(x) = (x \,|\, z), \qquad x \in \overline{M}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $f_z \in \mathcal{H}'$ folytonos lineáris funkcionál rendelkezik az előírt tulajdonságokkal. ■

3.6. Folytonos lineáris operátor adjungáltja

Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ ugyanazon $\mathbb{K}$ test feletti Hilbert-terek és legyen A a $\mathcal{H}$-n értelmezett $\mathcal{K}$-ba képező folytonos lineáris operátor, azaz $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$. Tetszőleges $y \in \mathcal{K}$ esetén tekintsük az alábbi

$$\varphi_y(x) := (Ax \,|\, y), \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $\varphi_y : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ függvényt, mely nyilvánvalóan folytonos lineáris funkcionál. A 3.50 Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen, $A^*(y)$ szimbólummal jelölt $\mathcal{H}$-beli vektor, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ mellett $\varphi_y(x) = (x \,|\, A^*(y))$ teljesül, vagyis $A^*(y)$ az az egyértelműen meghatározott $\mathcal{H}$-beli vektor, amely eleget tesz az alábbi

$$(Ax \,|\, y) = (x \,|\, A^*(y)), \qquad x \in \mathcal{H}, \tag{3.18}$$

ún. *adjungálási azonosságnak*. Világos, hogy a fentiek alapján tetszőleges $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ esetén tekinthető az az $A^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ *függvény*, amely eleget tesz a (3.18) egyenlőségnek. Ezt az $A^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ leképezést nevezzük az A operátor *adjungáltjának*.

Az alábbiakban megvizsgáljuk ennek az adjungált leképezésnek a legalapvetőbb tulajdonságait:

3.53. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$, akkor a* (3.18) *adjungálási azonosságnak eleget tevő $A^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ függvény olyan folytonos lineáris operátor (azaz $A^* \in \mathscr{B}(\mathcal{K};\mathcal{H})$), melyre $\|A^*\| = \|A\|$ és $(A^*)^* = A$.*

Bizonyítás. Az A^* linearitása nyilvánvaló a Riesz-féle reprezentációs vektor unicitásából és az A operátor linearitásából. A folytonosság igazolásához legyen $y \in \mathcal{K}$ egy tetszőleges vektor, akkor az adjungálási azonosságot valamint a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\|A^*y\|^2 = (A^*y \,|\, A^*y) = (AA^*y \,|\, y) \leq \|AA^*y\|\|y\| \leq \|A\|\|A^*y\|\|y\|,$$

amiből az $\|A^*y\| \leq \|A\|\|y\|$ becslés adódik. Ebből pedig már látható, hogy az A^* operátor folytonos és normájára fennáll az $\|A^*\| \leq \|A\|$ becslés. Következő lépésben belátjuk, hogy

$(A^*)^* = A$. Legyen ui. $x \in \mathcal{H}$, ekkor tetszőleges $y \in \mathcal{K}$ vektor esetén az adjungálási azonosságot alkalmazva kapjuk, hogy

$$(Ax \,|\, y) = (x \,|\, A^*y) = \overline{(A^*y \,|\, x)} = \overline{(y \,|\, (A^*)^*x)} = ((A^*)^*x \,|\, y),$$

amiből $(A^*)^*x = Ax$, vagyis $(A^*)^* = A$ következik. Végül az eddigiek alapján

$$\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|,$$

tehát $\|A\| \leq \|A^*\|$, amiből $\|A^*\| \leq \|A\|$ figyelembevételével $\|A\| = \|A^*\|$. ■

A fent igazolt $A^{**} := (A^*)^* = A$ tulajdonságot *involutivitás*nak nevezzük.

Az alábbi állításban az adjungálásnak az egyes műveletekkel való kapcsolatát vizsgáljuk meg.

3.54. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok, illetve $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges skalár. Ekkor fennállnak az alábbi azonosságok:*

(a) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
(b) $(A + B)^* = A^* + B^*$
(c) $(AB)^* = B^*A^*$

A 3.54 Állítás bizonyítása rendkívül egyszerű, ezért azt az olvasóra bízzuk.

3.55. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, akkor minden $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ folytonos lineáris operátorra fennáll az alábbi ún. C^*-tulajdonság:*

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2.$$

Bizonyítás. Az operátornorma szubmultiplikativitásának és az $\|A^*\| = \|A\|$ azonosság felhasználásával kapjuk, hogy $\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$, ezért elegendő a fordított irányú egyenlőtlenséget igazolnunk. Ehhez legyen $x \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor, ekkor a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\|Ax\|^2 = (A^*Ax \,|\, x) \leq \|A^*Ax\|\|x\| \leq \|A^*A\|\|x\|^2,$$

amiből az $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$ egyenlőtlenség adódik. Az $\|AA^*\| = \|A\|^2$ egyenlőséget ebből, illetve az involutivitás felhasználásával kapjuk. ■

Az alábbi definícióban bevezetjük az operátorelmélet adjungálás műveletéhez kapcsolódó legfontosabb operátorosztályait. A későbbi fejezetekben részletesen foglalkozunk majd ezek kvalitatív tulajdonságaival.

3.56. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér.

(a) A $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort *normálisnak* nevezzük, ha $T^*T = TT^*$, vagyis T és T^* felcserélhető.
(b) Az $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort *önadjungáltnak* nevezzük, ha $A^* = A$.
(c) Az $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort *pozitívnak* nevezzük, ha A önadjungált, és minden $x \in \mathcal{H}$ esetén $(Ax \,|\, x) \geq 0$.
(d) Az $U \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort *unitérnek* nevezzük, ha $U^*U = UU^* = I$, ahol I a $\mathcal{H}$ identikus operátorát jelöli,
(e) A $P \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort*ortogonális projekciónak*, vagy *projektornak* nevezzük, ha $P^* = P^2 = P$, vagyis P önadjungált és idempotens.

Természetesen a fenti operátor osztályok nem függetlenek: világos, hogy minden projektor pozitív operátor, minden pozitív operátor önadjungált, és minden önadjungált, illetve unitér operátor normális.

A továbbiakban gyakran felhasználjuk folytonos lineáris operátor és annak adjungáltjának kép- és magtereire vonatkozó alábbi összefüggéseket:

3.57. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, akkor bármely $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ operátorra fennállnak az alábbi azonosságok:*

$$\ker A = [\operatorname{ran} A^*]^\perp, \qquad \textit{illetve} \qquad \overline{\operatorname{ran} A} = [\ker A^*]^\perp. \tag{3.19}$$

Bizonyítás. Legyen először $x \in \ker A$, ekkor minden $y \in \mathcal{K}$ mellett

$$0 = (Ax \,|\, y) = (x \,|\, A^*y)$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy $x \in [\operatorname{ran} A^*]^\perp$. Fordítva, ha $x \in [\operatorname{ran} A^*]^\perp$, akkor minden $y \in \mathcal{K}$ mellett

$$0 = (x \,|\, A^*y) = (Ax \,|\, y),$$

vagyis $Ax \in \mathcal{K}^\perp = \{0\}$, vagy ami ugyanazt jelenti, $x \in \ker A$. A (3.19) első összefüggésében mindkét oldal ortokompementerét véve kapjuk, hogy

$$[\ker A]^\perp = [\operatorname{ran} A^*]^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{ran} A^*}.$$

Ebben a formulában az A operátort A^*-ra cserélve az $A^{**} = A$ egyenlőség felhasználásával pedig (3.19) második összefüggése adódik. ∎

3.7. Numerikus értékkészlet és numerikus sugár

Ha A és B folytonos lineáris operátorok a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, akkor az $A = B$ kijelentés egyenértékű azzal, hogy minden $x, y \in \mathcal{H}$ vektorra $(Ax \,|\, y) = (Bx \,|\, y)$. Ez a feltétel komplex Hilbert-terek esetén gyengíthető az alábbi *operátorokra vonatkozó polarizációs formulának* köszönhetően:

3.58. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. Ekkor bármely $x, y \in \mathcal{H}$ vektorok esetén fennáll, hogy*

$$(Ax \,|\, y) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \Big(A(x + i^k y) \,\Big|\, x + i^k y \Big). \tag{3.20}$$

3.59. Következmény. *Ha $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, és $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyanok operátorok, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ vektor esetén $(Ax \,|\, x) = (Bx \,|\, x)$, akkor $A = B$.*

Fontos megjegyeznünk, hogy az fenti következmény csak komplex Hilbert-terek esetén érvényes. Ha ui. $\mathcal{H}$ legalább két dimenziós valós Hilbert-tér, akkor megadható olyan $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ nem-nulla operátor, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ esetén $(Ax \,|\, x) = 0$ teljesül.

A fenti egyszerű észrevétel segítségével a komplex Hilbert-tér feletti normális, önadjungált, valamint pozitív operátorok alábbi hasznos jellemzését kapjuk:

3.60. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér.*

(1) *Egy $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátor pontosan akkor normális, ha minden $x \in \mathcal{H}$ esetén $\|Tx\| = \|T^*x\|$.*

(2) *Egy* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *operátor pontosan akkor önadjungált, ha a kvadratikus alakja valós, vagyis minden* $x \in \mathcal{H}$ *esetén* $(Ax \,|\, x) \in \mathbb{R}$.
(3) *Egy* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *operátor pontosan akkor pozitív, ha a kvadratikus alakja nemnegatív, vagyis minden* $x \in \mathcal{H}$ *esetén* $(Ax \,|\, x) \geq 0$.

Bizonyítás. (1) Tegyük fel, hogy a $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátorra $\|Tx\| = \|T^*x\|, (x \in \mathcal{H})$ teljesül, akkor

$$(T^*Tx \,|\, x) = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = (TT^*x \,|\, x),$$

ezért a 3.59 Következmény szerint $T^*T = TT^*$. A megfordítás hasonlóan igazolható.

(2) Ha az $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátor kvadratikus alakja valós, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén

$$(Ax \,|\, x) = \overline{(Ax \,|\, x)} = (A^*x \,|\, x),$$

így a 3.59 Következmény szerint $A = A^*$, vagyis A önadjungált. A megfordítás hasonlóan igazolható.

(3) Triviálisan következik (2)-ből. ■

3.61. Definíció. Legyen A folytonos lineáris operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. A

$$W(A) := \{(Ax \,|\, x) \,|\, x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \tag{3.21}$$

halmazt az A operátor *numerikus értékkészletének*, a

$$w(A) = \sup\{|(Ax \,|\, x)| \,|\, x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \tag{3.22}$$

számot pedig az A operátor *numerikus sugarának* nevezzük.

3.62. Állítás. *Legyen* $\mathcal{H}$ *komplex Hilbert-tér, akkor a numerikus sugár* $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ *feletti norma. Továbbá bármely* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *operátorra fennáll, hogy*

$$|(Ax \,|\, x)| \leq w(A)\|x\|^2, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{3.23}$$

Bizonyítás. A definícióból világos, hogy bármely $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátorra $w(A) \geq 0$, illetve a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből $w(A) \leq \|A\|$. Továbbá egyszerűen ellenőrizhető, hogy bármely $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátorok és $\lambda \in \mathbb{C}$ szám esetén

$$w(\lambda A) = |\lambda| w(A), \qquad w(A + B) \leq w(A) + w(B),$$

vagyis a $w : \mathscr{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}_+$ leképezés félnorma. (Vegyük észre, hogy eddig nem használtuk ki, hogy $\mathcal{H}$ komplex!) Másfelől, ha $w(A) = 0$, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $(Ax \,|\, x) = 0$, ezért a 3.59 Következmény szerint $A = 0$, amivel megmutattuk, hogy w norma. A (3.23) egyenlőtlenség nyilvánvalóan következik $w(A)$ definíciójából. ■

A következő tételben megmutatjuk, hogy w az operátornormával ekvivalens $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ feletti norma. Igazolható azonban, hogy az operátornormával ellentétben w nem szubmultiplikatív, vagyis léteznek olyan $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátorok, hogy $w(AB) > w(A)w(B)$.

3.63. Tétel. *Legyen* $\mathcal{H}$ *komplex Hilbert-tér és* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, *ekkor*

$$\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\|. \tag{3.24}$$

Bizonyítás. A felső becslés bizonyítása egyszerűen következik a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenségből: ha ugyanis $x \in \mathcal{H}$, $\|x\| = 1$, akkor

$$|(Ax \,|\, x)| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|.$$

Az alsó becslés igazolásához legyen $x, y \in \mathcal{H}$, és alkalmazzuk a operátorokra vonatkozó (3.20) polarizációs azonosságot, a (3.23) formulát, majd a paralelogramma egyenlőséget:

$$\begin{aligned}
4|(Ax \,|\, y)| &\leq \sum_{k=0}^{3} |(A(x + i^k y) \,|\, x + i^k y)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{3} w(A) \cdot \|x + i^k y\|^2 \\
&= w(A) \cdot [\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2] + w(A) \cdot [\|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2] \\
&= 2w(A) \cdot [\|x\|^2 + \|y\|^2] + 2w(A) \cdot [\|x\|^2 + \|iy\|^2] \\
&= 4w(A) \cdot [\|x\|^2 + \|y\|^2].
\end{aligned}$$

Következésképp, ha $u, v \in \mathcal{H}$, $\|u\| = \|v\| = 1$, akkor

$$|(Au \,|\, v)| \leq 2w(A),$$

így tetszőleges $x, y \in \mathcal{H}$ mellett ($u = \frac{x}{\|x\|}$ és $v = \frac{y}{\|y\|}$ választással)

$$|(Ax \,|\, y)| \leq 2w(A)\|x\|\|y\|.$$

Ebből $y = Ax$ választással kapjuk, hogy

$$\|Ax\|^2 \leq 2w(A)\|x\|\|Ax\|,$$

amiből az $\|A\| \leq 2w(A)$ egyenlőtlenség már adódik. ■

A fenti tétel leglényegesebb tartalma tehát az, hogy a numerikus sugár *komplex* Hilbert-tér esetén az operátornormával ekvivalens norma. Könnyen látható azonban, hogy w nem algebra norma (vagyis általában nem igaz a $w(AB) \leq w(A)w(B)$ egyenlőtlenség), és a C^*-tulajdonságot sem teljesíti (vagyis nem igaz a $w(A^*A) = w(A)^2$ egyenlőség).

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy bármely A önadjungált operátor numerikus sugara megegyezik A normájával.

3.64. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ tetszőleges folytonos lineáris operátor, ekkor*

$$|(Tx \,|\, y) + (Ty \,|\, x)| \leq 2w(T)\|x\|\|y\|, \qquad x, y \in \mathcal{H}. \tag{3.25}$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x, y \in \mathcal{H}$ mellett

$$(T(x + y) \,|\, x + y) - (T(x - y) \,|\, x - y) = 2(Tx \,|\, y) + 2(Ty \,|\, x),$$

azért

$$\begin{aligned}
2|(Tx \,|\, y) + (Ty \,|\, x)| &\leq |(T(x + y) \,|\, x + y)| + |(T(x - y) \,|\, x - y)| \\
&\leq w(T) \cdot \left[\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right] \\
&= 2w(T) \cdot \left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right],
\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy bármely $u, v \in \mathcal{H}$, $\|u\| = \|v\| = 1$ esetén

$$|(Tu \mid v) + (Tv \mid u)| \leq 2w(T).$$

Ebből $u := \frac{x}{\|x\|}$ és $v := \frac{y}{\|y\|}$ választással átrendezés után nyerjük a (3.25) összefüggést. ■

3.65. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, akkor $w(A) = \|A\|$.*

Bizonyítás. A 3.63 Tétel értelmében elegendő a $w(A) \geq \|A\|$ becslést igazolnunk. Legyenek $x, y \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektorok, akkor az $A = A^*$ egyenlőséget és az imént igazolt (3.25) becslést felhasználva kapjuk, hogy

$$2|\mathfrak{Re}(Ax \mid y)| \leq 2w(A)\|x\|\|y\|,$$

amiből $y = Ax$ választással következik, hogy

$$\|Ax\| \leq w(A)\|x\|,$$

vagyis $\|A\| \leq w(A)$. ■

3.66. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátor. Akkor $m := \inf W(A)$, és $M := \sup W(A)$ jelölésekkel A normájára fennáll, hogy*

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel figyelembevételével $\|A\| = w(A)$, ahol

$$w(A) = \sup_{\lambda \in W(A)} |\lambda| = \max\{|m|, |M|\},$$

amivel a bizonyítandó egyenlőséget beláttuk. ■

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy *komplex* Hilbert-tér esetén a $w(T) = \|T\|$ egyenlőség fennáll minden T normális operátorra is. Ehhez először igazoljuk az alábbi, önmagában is érdekes Lemmát:

3.67. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, akkor bármely $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátor és n természetes szám mellett fennáll, hogy $w(T^{2^n}) \leq w(T)^{2^n}$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathcal{H}$ és $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ egyelőre tetszőleges, akkor a a 3.64 Lemma (3.25) egyenlőtlenségét T helyett a λT operátorra, az x, valamint az $y = \lambda Tx$ vektorokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\Big|(\lambda Tx \mid \lambda Tx) + (\lambda^2 T^2 x \mid x)\Big| \leq 2w(\lambda T)\|x\|\|\lambda Tx\|,$$

azaz

$$\Big|\|Tx\|^2 + \lambda^2 (T^2 x \mid x)\Big| \leq 2w(T)\|x\|\|Tx\|,$$

amiből alkalmas $\lambda \in \mathbb{C}$ választással kapjuk, hogy

$$\|Tx\|^2 + |(T^2 x \mid x)| \leq 2w(T)\|x\|\|Tx\|.$$

Ezt átrendezve, majd teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy

$$\Big[\|Tx\| - w(T)\|x\|\Big]^2 + |(T^2 x \mid x)| \leq w(T)^2 \|x\|^2,$$

amiből pedig világos, hogy bármely $z \in \mathcal{H}$, $\|z\| = 1$ esetén

$$|(T^2 z \mid z)| \leq w(T)^2,$$

vagyis $w(T^2) \leq w(T)^2$, amiből a lemma állítása már teljes indukcióval adódik. ■

Megjegyezzük, hogy a fenti lemmában igazolt egyenlőségnél erősebb eredmény is igazolható, éspedig $w(T^n) \leq w(T)^n$ teljesül minden n természetes szám mellett.

3.68. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér. Ha $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ normális operátor, akkor $w(T) = \|T\|$.*

Bizonyítás. Mivel a T operátor normalis, azért a 3.60 Tétel (1) pontja alapján bármely $x \in \mathcal{H}$ vektorra fennáll, hogy

$$\|T^2 x\| = \|T(Tx)\| = \|T^*(Tx)\|,$$

amiből kapjuk, hogy $\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. Ebből teljes indukcióval nyerjük, hogy minden n természetes számra $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$. A 3.63 Tétel és a 3.67 Lemma szerint

$$\|T\|^{2^n} = \|T^{2^n}\| \leq 2w(T^{2^n}) \leq 2w(T)^{2^n},$$

azaz $\|T\| \leq \sqrt[2^n]{2}w(T)$, amiből a $\|T\| \leq w(T)$ egyenlőtlenség $n \to \infty$ mellett adódik. ■

Vegyük észre, hogy a fenti tétel valós Hilbert-terekben nem érvényes, ui. például $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ esetén a

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal értelmezett leképezés unitér, következésképp normális operátor. Könnyen látható ugyanakkor, hogy a T operátor normájára $\|T\| = 1$, a numerikus sugarára pedig $w(T) = 0$ teljesül.

4. FEJEZET

A Hahn–Banach-tétel és következményei

Emlékeztetünk arra, hogy ha E vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett, akkor az E-n értelmezett lineáris funkcionálok halmazát (vagyis az $f : E \to \mathbb{K}$ lineáris leképezések összességét) az E *algebrai duálisának* nevezzük és az E^* szimbólummal jelöljük. Világos, hogy E^* vektortér a pontonkénti műveletekkel. Ha E normált tér, akkor beszélhetünk az E *topologikus duálisáról*, mely alatt az E-n értelmezett folytonos lineáris funkcionálok E' halmazát értjük, tehát

$$E' = \{f \in E^* \mid f \text{ folytonos}\}.$$

Az előzőekben láttuk, hogy E' az alábbi

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in E, \|x\| \leq 1\} \tag{4.1}$$

egyenlőséggel értelmezett normával ellátva Banach-tér, függetlenül attól, hogy maga az E normált tér teljes-e vagy sem. Az alábbiakban megállapodunk abban, hogy – hacsak másképp nem jelezzük – E' fölött mindig a fenti (4.1) funkcionálnormát tekintjük normának.

4.1. A Hahn–Banach-tétel algebrai alakja

4.1. Definíció. Legyen E valós vektortér. Egy $p : E \to \mathbb{R}$ leképezést *szublineáris függvénynek* nevezünk, ha p eleget tesz az alábbi két követelménynek:

(1) p *pozitív homogén*, vagyis minden $x \in E$ és $\alpha \geq 0$ esetén $p(\alpha x) = \alpha p(x)$,
(2) p *szubadditív*, vagyis minden $x, y \in E$ mellett $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Vegyük észre, hogy ha p szublineáris függvény az E valós vektortér fölött, akkor a pozitív homogenitás miatt $p(0) = 0$, továbbá a szubadditivitást felhasználva minden $x \in E$ vektorra $-p(-x) \leq p(x)$.

A fejezet fő eredménye az ún. Hahn–Banach-féle kiterjesztési tétel, miszerint egy altéren értelmezett, szublineáris függvény által dominált funkcionál a dominálás megtartása mellett kiterjeszthető a vektortér egészére. A bizonyítás az alábbi lemmán alapszik, melynek lényege, hogy a kérdéses funkcionál a dominálás megtartása mellett kiterjeszthető egy eggyel magasabb dimenziós altérre.

4.2. Lemma. *Legyen E valós vektortér, $p : E \to \mathbb{R}$ szublineáris függvény, legyen továbbá $E_0 \subseteq E$ lineáris altér és $f_0 : E_0 \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, melyre $f_0 \leq p|_{E_0}$, azaz*

$$f_0(x) \leq p(x), \qquad x \in E_0.$$

Ha $x_1 \in E \setminus E_0$ egy tetszőleges vektor és $E_1 := E_0 \oplus \mathbb{R}.x_1$, akkor létezik olyan $f : E_1 \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely kiterjesztése f_0-nak és amelyre $f \leq p|_{E_1}$, azaz

$$f(x) \leq p(x), \qquad x \in E_1.$$

Bizonyítás. Az $E_1 := E_0 \oplus \mathbb{R}.x_1$ altér értelmezése miatt világos, hogy tetszőlges $c \in \mathbb{R}$ esetén az alábbi

$$f_c(x + \lambda x_1) := f_0(x) + \lambda c, \qquad x \in E_0, \lambda \in \mathbb{R}$$

egyenlőséggel definiált $f_c : E_1 \to \mathbb{R}$ leképezés lineáris funkcionál, sőt valójában az is könnyen látható, hogy az összes f_0-t kiterjesztő E_1 feletti lineáris funkcionál előáll a fenti f_c alakban. Emiatt a lemma igazolásához elegendő olyan $c \in \mathbb{R}$ szám létezését igazolni, amelyre $f_c \leq p|_{E_1}$, vagyis amelyre

$$f_0(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda x_1), \qquad \forall x \in E_0, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Vegyük észre, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ olyan szám, amelyre (4.2) fennáll, akkor arra egyrészt $\lambda := 1$ választással

$$c \leq p(x + x_1) - f_0(x), \qquad \forall x \in E_0,$$

vagyis erre a c számra

$$c_+ := \inf\{p(x + x_1) - f_0(x) \,|\, x \in E_0\}$$

jelölés mellett $c \leq c_+$ teljesül. Másrészt ismét (4.2)-ből $\lambda := -1$ választással

$$c \geq f_0(x) - p(x - x_1), \qquad \forall x \in E_0,$$

azaz a

$$c_- := \sup\{f_0(x) - p(x - x_1) \,|\, x \in E_0\}$$

jelölést bevezetve $c_- \leq c$. Megmutatjuk, hogy $c_- \leq c_+$ és bármely $c_- \leq c \leq c_+$ mellett az $f := f_c$ lineáris funkcionálra teljesül a lemma állítása. Legyenek ugyanis $x, x' \in E_0$ tetszőleges vektorok, akkor a p szubadditivitása folytán

$$f_0(x) + f_0(x') = f_0(x + x') \leq p(x + x') \leq p(x - x_1) + p(x' + x_1),$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$f_0(x) - p(x - x_1) \leq p(x' + x_1) - f_0(x'),$$

amiből pedig a $c_- \leq c_+$ összefüggés már következik.

Végül megmutatjuk, hogy tetszőleges $c_- \leq c \leq c_+$ szám eleget tesz a (4.2) egyenlőtlenségnek. Legyen ui. $x \in E_0$ egy tetszőleges vektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám. Ha $\lambda > 0$, akkor a $c \leq c_+ \leq p(\frac{x}{\lambda} + x_1) - f_0(\frac{x}{\lambda})$ egyenlőtlenségből valamint p pozitív homogenitásának felhasználásával

$$f_0(x) + \lambda c = \lambda\left(f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) + c\right) \leq \lambda p\left(\frac{x}{\lambda} + x_1\right) = p(x + \lambda x_1),$$

ha pedig $\lambda < 0$, akkor a $c \geq c_- \geq f_0(\frac{x}{-\lambda}) - p(\frac{x}{-\lambda} - x_1)$ egyenlőtlenségből valamint p pozitív homogenitásának felhasználásával kapjuk, hogy

$$f_0(x) + \lambda c = (-\lambda)\left(f_0\left(\frac{x}{-\lambda}\right) - c\right) \leq (-\lambda) p\left(\frac{x}{-\lambda} - x_1\right) = p(x + \lambda x_1),$$

amivel a (4.2) egyenlőtlenséget tetszőleges $x \in E_0$ és λ valós szám mellett beláttuk. Ezzel megmutattuk, hogy az $f = f_c$ funkcionál eleget tesz a lemma követelményeinek. ■

4.3. A Hahn–Banach-tétel algebrai alakja. *Legyen E valós vektortér, $p : E \to \mathbb{R}$ szublineáris függvény, legyen továbbá $E_0 \subseteq E$ lineáris altér, valamint $f_0 : E_0 \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre $f_0 \leq p|_{E_0}$, vagyis*

$$f_0(x) \leq p(x), \qquad x \in E_0.$$

Ekkor létezik olyan $f : E \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, mely kiterjeszti f_0-t, és amelyre $f \leq p$, azaz

$$f(x) \leq p(x), \qquad x \in E.$$

Bizonyítás. Jelölje Φ azon $g : E_g \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok halmazát, ahol E_g lineáris altere E-nek, $E_0 \subseteq E_g$, továbbá g az f_0 funkcionál olyan kiterjesztése, amelyre $g \leq p|_{E_g}$. Világos, hogy $f_0 \in \Phi$, továbbá a

$$g_1 \leq g_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_1 \subseteq g_2, \qquad g_1, g_2 \in \Phi$$

reláció parciális rendezés Φ-n. Megmutatjuk, hogy $(\Phi, \leq)$ induktívan rendezett, azaz Φ tetszőleges olyan nem-üres részhalmaza felülről korlátos, amelynek bármely két eleme összehasonlítható. Legyen ui. $(g_i)_{i\in\mathscr{I}}$ egy olyan Φ-beli nem-üres rendszer, hogy bármely $i, j \in \mathscr{I}$-re $g_i \leq g_j$ vagy $g_j \leq g_i$. Könnyen látható, hogy

$$E_g \coloneqq \bigcup_{i\in\mathscr{I}} E_{g_i}$$

az E_0-t tartalmazó lineáris altere E-nek. Értelmezzük továbbá a $g : E_g \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$g(x) \coloneqq g_i(x), \qquad x \in E_g$$

egyenlőséggel, ahol $i \in \mathscr{I}$ egy tetszőleges olyan index, amelyre $x \in E_{g_i}$. A $(g_i)_{i\in\mathscr{I}}$ rendszerre tett feltevés alapján g jól értelmezett lineáris funkcionál. Világos továbbá az is, hogy $g \in \Phi$ és bármely i-re $g_i \leq g$, vagyis g felső korlátja a $\{g_i \,|\, i \in \mathscr{I}\}$ halmaznak. A Zorn-lemma szerint létezik maximális elem Φ-ben, legyen f egy ilyen. Megmutatjuk, hogy f teljesíti a tétel követelményeiben foglaltakat. Jelölje ui. E_f az f értelmezési tartományát, akkor a Φ értelmezése alapján elegendő azt megmutatnunk, hogy $E_f = E$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $E_f \neq E$ és legyen $x_1 \in E \setminus E_f$ egy tetszőleges vektor, akkor a 4.2 Lemma szerint létezik olyan f_1 az $E_1 \coloneqq E_f \oplus \mathbb{R}.x_1$ altéren értelmezett lineáris funkcionál, amely kiterjeszti f-et és amelyre $f_1 \leq p|_{E_1}$. Ekkor Φ értelmezése alapján $f_1 \in \Phi$ és $f \leq f_1$, ami viszont ellentmond az f funkcionál maximalitásának. ■

A Hahn-Banach-tétel első következményeként igazoljuk az alábbi komplex vektorterekben is érvényes eredményt:

4.4. Hahn–Banach-tétel, komplex változat. *Legyen E valós vagy komplex vektortér, $E_0 \subseteq E$ lineáris altér és $f_0 : E_0 \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál. Legyen $p : E \to \mathbb{R}_+$ olyan félnorma, amelyre $|f_0| \leq p|_{E_0}$. Ekkor létezik olyan $f : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amely kiterjeszti f_0-t, és amelyre $|f| \leq p$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy E valós vektortér. Világos, hogy a p félnorma szublineáris függvény, és hogy $f_0 \leq p|_{E_0}$, ezért a Hahn–Banach tétel algebrai alakja szerint létezik olyan $f : E \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely kiterjeszti f_0-t és amelyre $f \leq p$. Másfelől bármely $x \in E$ mellett $-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x)$, ezért

$$|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\} \leq p(x), \qquad x \in E,$$

vagyis $|f| \leq p$, amivel a tételt valós esetben igazoltuk.

Tegyük fel most, hogy E komplex vektortér. A feltétel alapján világos, hogy bármely $x \in E_0$ esetén fennáll a $\mathfrak{Re}\, f_0(x) \leq p(x)$ egyenlőtlenség, ezért a Hahn–Banach tételt alkalmazva az E alatt fekvő *valós* vektortérre és a $g_0 := \mathfrak{Re}\, f_0$ valós lineáris funkcionálra nyerjük, hogy létezik olyan $g : E \to \mathbb{R}$ valós lineáris funkcionál, amely kiterjeszti g_0-t és amelyre $g \leq p$. Vezessük be az

$$f(x) := g(x) - ig(ix), \qquad x \in E,$$

egyenlőséggel értelmezett $f : E \to \mathbb{C}$ függvényt. Megmutatjuk, hogy f olyan komplex lineáris funkcionál E-n, amely kiterjeszti f_0-t és amelyre $|f| \leq p$. Mivel g valós lineáris funkcionál, azért nyilvánvaló, hogy f szintén valós lineáris funkcionál E-n, ezért f komplex linearitása igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy bármely $x \in E$ mellett $f(ix) = if(x)$. Legyen tehát $x \in E$ tetszőleges vektor, akkor

$$f(ix) = g(ix) - ig(i^2x) = g(ix) + ig(x) = i(-ig(ix) + g(x)) = if(x),$$

amivel tehát f komplex linearitását igazoltuk. Másfelől f kiterjeszti f_0-t, ui. bármely $x \in E_0$ esetén

$$f(x) = g(x) - ig(ix) = \mathfrak{Re}\, f_0(x) - i\,\mathfrak{Re}\, f_0(ix) = \mathfrak{Re}\, f_0(x) + i\,\mathfrak{Im}\, f_0(x) = f_0(x).$$

Végül az $|f| \leq p$ egyenlőtlenség igazolásához legyen $x \in E$ tetszőleges vektor és válasszunk olyan t valós számot, amelyre $e^{it}f(x) = |f(x)|$, akkor a $\mathfrak{Re}\, f = g$ összefüggés miatt

$$|f(x)| = e^{it}f(x) = f(e^{it}x) = \mathfrak{Re}\, f(e^{it}x) = g(e^{it}x) \leq p(e^{it}x) = p(x),$$

amivel az $|f| \leq p$ összefüggést és egyúttal a tételt komplex esetben is igazoltuk. ■

A fenti eredmény egy rendkívül fontos alkalmazásaként kapjuk, hogy egy normált tér alterén megadott folytonos lineáris funkcionál a folytonosság, a linearitás és a norma megtartásával kiterjeszthető az egész térre:

4.5. Tétel. *Legyen E valós vagy komplex normált tér, $E_0 \subseteq E$ lineáris altér és legyen $f_0 : E_0 \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál. Ekkor létezik olyan $f \in E'$ folytonos lineáris funkcionál, amely kiterjeszti f_0-t és amelyre $\|f_0\| = \|f\|$.*

Bizonyítás. Világos, hogy a

$$p(x) := \|f_0\| \cdot \|x\|, \qquad x \in E$$

egyenlőséggel értelmezett $p : E \to \mathbb{R}_+$ leképezés olyan félnorma, amelyre

$$|f_0(x)| \leq \|f_0\| \cdot \|x\| = p(x), \qquad x \in E_0,$$

ezért az előző tétel szerint létezik olyan $f \in E^*$ lineáris funkcionál, amely kiterjeszti f_0-t, továbbá $|f| \leq p$, vagyis minden $x \in E$ mellett $|f(x)| \leq \|f_0\| \cdot \|x\|$. Ez azt jelenti, hogy f folytonos és a normájára fennáll az $\|f\| \leq \|f_0\|$ egyenlőtlenség. Másrészt az $\|f\| \geq \|f_0\|$ egyenlőtlenség nyilvánvaló abból, hogy f kiterjesztése f_0-nak, vagyis $\|f\| = \|f_0\|$. ■

A kiválasztási axióma segítségével bármely (akár végtelen dimenziós) vektortéren bizonyítható nem-triviális lineáris funkcionál létezése. Ugyanakkor nem nyilvánvaló, hogy tetszőleges normált téren létezik-e nem-triviális *folytonos* lineáris funkcionál. Erre a kérdésre az alábbi eredmény ad pozitív választ.

4.6. Tétel. *Legyen E nem-nulla dimenziós normált tér, ekkor bármely $x \in E$ vektorhoz létezik olyan $f \in E'$ folytonos lineáris funkcionál, amelyre $\|f\| = 1$ és $f(x) = \|x\|$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy x nem nulla és jelölje $e := \dfrac{x}{\|x\|}$, illetve legyen $E_0 := \mathbb{K}.e$ az e vektor által generált egy-dimenziós altér. Világos, hogy az

$$f_0(\lambda e) := \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{K}$$

hozzárendelés olyan $f_0 : E_0 \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált definiál, amelyre

$$|f_0(\lambda e)| = |\lambda| = \|\lambda e\|,$$

emiatt f_0-ra $\|f_0\| = 1$, továbbá $f_0(x) = \|x\|$ teljesül. A 4.5 Tétel szerint létezik az f_0-nak normatartó kiterjeszése E-re, vagyis létezik $f \in E'$, amely kiterjesztése f_0-nak és amelyre $\|f\| = \|f_0\| = 1$. Ekkor $x \in E_0$ miatt $f(x) = f_0(x) = \|x\|$, vagyis $f \in E'$ eleget tesz a tételben foglaltaknak. Végül ha $x = 0$, akkor bármely egy-normájú E feletti folytonos lineáris funkcionál eleget tesz a követelményeknek, ilyen funkcionál létezését pedig a $\dim E \neq 0$ feltétel és a bizonyítás első fele garantálják. ■

A fenti tételnek gyakran használjuk az alábbi fontos következményét:

4.7. Következmény. *Ha E normált tér, akkor minden $x \in E$ vektor normájára fennáll, hogy*

$$\|x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |f(x)|.$$

Bizonyítás. Ha $f \in E'$ olyan folytonos lineáris funkcionál, amelyre $\|f\| \leq 1$, akkor $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$, ezért

$$\|x\| \geq \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |f(x)|.$$

A fordított irányú egyenlőtlenséget a fenti tétel azonnali következményeként kapjuk. ■

Egy másik rendkívül fontos következménye a Hahn–Banach-tételnek az a tény, hogy normált fölött a folytonos lineáris funkcionálok halmaza szétválasztó:

4.8. Következmény. *Legyen E normált tér, és legyenek $x, y \in E$ különböző vektorok, akkor létezik olyan $f \in E'$, hogy $f(x) \neq f(y)$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.6 Tételt az $x - y$ vektorra. ■

4.9. Állítás. *Legyen E normált tér és $E_0 \subseteq E$ az E valódi zárt lineáris altere. Ekkor tetszőleges $x_0 \in E \setminus E_0$ vektorhoz létezik olyan $f \in E'$, hogy $f(x_0) = 1$, $E_0 \subseteq \ker f$, és $\|f\| = \dfrac{1}{d}$, ahol d az x_0 vektor E_0 altértől való távolsága.*

Bizonyítás. Tekintsük az $E/E_0 \neq \{0\}$ faktor normált teret, akkor a 4.6 Tétel szerint létezik olyan $g : E/E_0 \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, hogy $\|g\| = 1$ és $g(x_0 + E_0) = \|x_0 + E_0\|$, ahol a faktornorma értelmezése alapján

$$\|x_0 + E_0\| = \inf\{\|x_0 + z\| \mid z \in E_0\} = d,$$

vagyis $g(x_0+E_0)=d$. Jelölje $j:E\to E/E_0$ a kanonikus leképezést és legyen $f:=\frac{1}{d}(g\circ j)$, vagyis

$$f(x):=\frac{1}{d}g(x+E_0), \qquad x\in E.$$

Világos f folytonos lineáris funkcionál, melyre $\|f\|\le\frac{1}{d}\|g\|\|j\|=\frac{1}{d}$, illetve

$$f(x_0)=\frac{1}{d}g(x_0+E_0)=1,$$

továbbá $f(x)=0$ minden $x\in E_0$ vektorra, vagyis $E_0\subseteq\ker f$. Végül a hiányzó $\|f\|\ge\frac{1}{d}$ egyenlőtlenség igazolásához válasszunk egy olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-ben haladó sorozatot, hogy minden n-re $\|x_n+E_0\|<1$ és $g(x_n+E_0)\to\|g\|=1$. A faktornorma értelmezése alapján válasszunk olyan $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E_0-beli sorozatot, hogy minden n-re $\|x_n+y_n\|\le 1$, akkor $\|f\|\ge|f(x_n+y_n)|$ és

$$|f(x_n+y_n)|=\frac{1}{d}|g(x_n+E_0)|\to\frac{1}{d},$$

amiből az $\|f\|\ge\frac{1}{d}$ egyenlőtlenség már következik. ■

Megjegyezzük, hogy a fenti eredmények mindegyike közvetve a kiválasztási axiómát használja, vagyis e bizonyítások nem konstruktívak. Tehát a most bizonyított tételek az előírt tulajdonsággal rendelkező funkcionál *létezését* biztosítják csupán, de semmilyen módszert nem adnak annak előállítására. Szerencsére azonban az alkalmazások szempontjából erre legtöbbször nincs is szükség. Vegyük észre azt is, hogy az állítások egyikében sem volt szó egyértelműségről, és általában nem is mondható unicitás.

4.2. Banach-limeszek

4.10. Definíció. A korlátos valós számsorozatok ℓ^∞ vektorterén értelmezett L lineáris funkcionált *Banach-limesznek* nevezzük, ha teljesülnek rá az alábbi követelmények:

(1) L pozitív funkcionál, vagyis minden nemnegatív tagú $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$ sorozatra $L(x)\ge 0$.
(2) Minden $x\in\ell^\infty$ esetén $L(Sx)=L(x)$, ahol $S:\ell^\infty\to\ell^\infty$ az $(Sx)_n:=x_{n+1}$ hozzárendeléssel értelmezett ún. *bal-eltolás* (shift) operátor.
(3) $L(\mathbf{1})=1$, ahol $\mathbf{1}$ a konstans 1 sorozat.

4.11. Állítás. *Bármely L Banach-limesz rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(a) *L folytonos és $\|L\|=L(\mathbf{1})=1$,*
(b) *minden k természetes szám és $x\in\ell^\infty$ esetén $L(S^kx)=L(x)$*
(c) *bármely $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$ esetén*

$$\liminf_{n\to\infty}x_n\le L(x)\le\limsup_{n\to\infty}x_n,$$

(d) *bármely konvergens x sorozat esetén $L(x)=\lim_{n\to\infty}x_n$, vagyis L konvergens sorozatok terére vett leszűkítése megegyezik a klasszikus limesz-operációval.*

Bizonyítás. (a) Először megmutatjuk, hogy tetszőleges $x\in\ell^\infty$ sorozatra

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}x_n\le L(x)\le\sup_{n\in\mathbb{N}}x_n. \tag{4.3}$$

Jelölje ugyanis α az x sorozat infimumát, β pedig a supremumát, akkor $x - \alpha \cdot \mathbf{1} \geq 0$, illetve $\beta \cdot \mathbf{1} - x \geq 0$, valamint L pozitivitásának figyelembevételével

$$L(x - \alpha \cdot \mathbf{1}) \geq 0 \qquad \text{és } L(\beta \cdot \mathbf{1} - x) \geq 0,$$

amiből L linearitását és az $L(\mathbf{1}) = 1$ egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy $\alpha \leq L(x) \leq \beta$, ami pedig éppen a (4.3) egyenlőtlenség. Ennek segítségével pedig (a) már könnyen igazolható, ui. bármely $x \in \ell^\infty$ esetén (4.3) szerint $L(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq \|x\|_\infty$, illetve $-L(x) = L(-x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(-x_n) \leq \|x\|_\infty$, amiből az alábbi becslést nyerjük:

$$|L(x)| = \max\{L(x), -L(x)\} \leq \|x\|_\infty.$$

Ez az egyenlőtlenség pedig pontosan azt jelenti, hogy L folytonos és $\|L\| \leq 1$. Az $\|L\| \geq 1$ összefüggés az $L(\mathbf{1}) = 1$ feltételből nyilvánvaló, ezért valóban $\|L\| = L(\mathbf{1}) = 1$.

(b) Az $L(Sx) = L(x), (x \in \ell^\infty)$ feltételből következik teljes indukcióval.

(c) Legyen $x \in \ell^\infty$ tetszőleges, akkor bármely n, illetve k természetes számok mellett $(S^k x)_n = x_{n+k}$, ezért (b), illetve (4.3) figyelembevételével rögzített k mellett

$$\inf_{n\in\mathbb{N}, n\geq k} x_k \leq L(S^k x) = L(x) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}, n\geq k} x_k,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{n\in\mathbb{N}, n\geq k} x_k \right) \leq L(x) \leq \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}, n\geq k} x_k \right) = \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

amivel (c)-t igazoltuk.

A (d) állítás nyilvánvalóan következik (c)-ből. ■

A fenti állítás (d) része szerint minden Banach-limesz folytonos lineáris kiterjesztése a konvergens valós sorozatok c vektorterén értelmezett

$$l(x) := \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c, \tag{4.4}$$

$l : c \to \mathbb{R}$ limesz-operációnak a korlátos sorozatok ℓ^∞ terére. Azonban egyáltalán nem magától értetődő ilyen L funkcionál létezése.

4.12. Tétel. *Az ℓ^∞ sorozattéren létezik Banach-limesz.*

Bizonyítás. Jelölje c a valós konvergens sorozatok halmazát, akkor c lineáris altere a korlátos sorozatok ℓ^∞ terének. Jelölje l a (4.4) egyenlőséggel értelmezett $l : c \to \mathbb{R}$ klasszikus limesz-operációt és vezessük be a

$$p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad x \in \ell^\infty$$

egyenlőséggel definiált $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ leképezést. A $\limsup$ leképezés szublinearitása alapján könnyen ellenőrizhető, hogy p maga is szublineáris, másfelől az analízisből jól ismert, hogy tetszőleges $x \in c$ konvergens sorozatra fennáll az

$$l(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k = p(x),$$

egyenlőség, következésképp $l \leq p|_c$. A 4.3 Hahn–Banach-tétel szerint létezik olyan $L \in (\ell^\infty)'$, amely kiterjeszti az l funkcionált és amelyre fennáll, hogy $L \leq p$. Megmutatjuk, hogy L

Banach-limesz. Legyen először $x \in \ell^\infty$ egy nemnegatív tagú sorozat, ekkor p értelmezése alapján $p(-x) \leq 0$, ezért

$$L(x) = -L(-x) \geq -p(-x) \geq 0,$$

ami azt jelenti, hogy L pozitív funkcionál. Legyen most $x \in \ell^\infty$ tetszőleges sorozat, ekkor

$$-p(-x + Sx) \leq -L(-x + Sx) = L(x - Sx) \leq p(x - Sx). \tag{4.5}$$

Jelölje $y := x - Sx$, akkor minden k-ra $y_k = x_k - x_{k+1}$, ezért

$$p(y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0 - x_{n+1}}{n+1} = 0,$$

vagyis $p(x - Sx) = 0$ következik. Hasonlóképp adódik, hogy $p(Sx - x) = 0$, amiből (4.5) alapján $L(x - Sx) = 0$, vagyis $L(x) = L(Sx)$. Végül $\mathbf{1} \in c$ miatt

$$L(\mathbf{1}) = l(\mathbf{1}) = 1,$$

amivel megmutattuk, hogy az L funkcionál eleget tesz a 4.10 Definíció mindhárom feltételének, vagyis L Banach-limesz. ∎

4.3. A biduális tér és normált tér teljessé tétele

4.13. Definíció. Legyen E normált tér, akkor az $E'' := (E')'$ Banach-teret az E *topologikus biduálisának* (vagy röviden *biduálisának*) nevezzük.

Az alábbiakban legyen E egy normált tér és legyen $x \in E$ egy rögzített E-beli vektor. Értelmezzük az

$$\widehat{x}(f) := f(x), \qquad f \in E', \tag{4.6}$$

egyenlőségen keresztül definiált $\widehat{x} : E' \to \mathbb{K}$ függvényt.

4.14. Állítás. *Tetszőleges $x \in E$ esetén a* (4.6) *egyenlőséggel értelmezett $\widehat{x} : E' \to \mathbb{K}$ függvény folytonos lineáris funkcionál (azaz $\widehat{x} \in E''$), amelyre fennáll az $\|\widehat{x}\| = \|x\|$ egyenlőség.*

Bizonyítás. Az $\widehat{x}$ függvény linearitása egyszerűen ellenőrizhető a definícióból. Legyen továbbá $f \in E'$ tetszőleges, akkor az f funkcionál folytonossága miatt

$$|\widehat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|,$$

amiből következik, hogy $\widehat{x}$ folytonos lineáris funkcionál E'-n, és $\|\widehat{x}\| \leq \|x\|$. Másfelől a a 4.6 Tétel szerint az x vektorhoz létezik olyan $f \in E'$, $\|f\| = 1$ lineáris funkcionál E felett, amelyre $f(x) = \|x\|$, ezért fennáll az

$$\|\widehat{x}\| \geq |\widehat{x}(f)| = |f(x)| = \|x\|$$

egyenlőség is, amiből az $\|x\| = \|\widehat{x}\|$ egyenlőség már következik. ∎

4.15. Tétel. *Ha E normált tér, akkor a*

$$Jx := \widehat{x}, \qquad x \in E, \tag{4.7}$$

hozzárendeléssel értelmezett $J : E \to E''$ leképezés folytonos lineáris izometria.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy J lineáris: legyenek ui. $x, y \in E$ tetszőleges vektorok, és jelölje $z := x + y$. A J additivitásához azt kell igazolnunk, hogy $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{z}$. Ehhez legyen $f \in E'$ egy tetszőleges folytonos lineáris funkcionál, akkor

$$(\widehat{x} + \widehat{y})(f) = f(x) + f(y) = f(z) = \widehat{z}(f),$$

amiből a bizonyítandó egyenlőség már következik. A J leképezés homogenitása hasonlóképp igazolható. Végül a 4.14 Állítás alapján tetszőleges $x \in E$ vektor esetén

$$\|Jx\| = \|\widehat{x}\| = \|x\|,$$

vagyis J izometria. ■

4.16. Definíció. Ha E normált tér, akkor a (4.7) egyenlőséggel definiált $J : E \to E''$ leképezést az E és E'' közötti kanonikus beágyazási operátornak nevezzük.

4.17. Definíció. Az E normált tér teljessé tételének nevezünk minden olyan $(\widehat{E}, V)$ párt, ahol $\widehat{E}$ Banach-tér, V pedig olyan E-n értelmezett $\widehat{E}$-ba képező folytonos lineáris izometria, amelyre képtere sűrű $\widehat{E}$-ban, azaz $\overline{\operatorname{ran} V} = \widehat{E}$.

4.18. Tétel. *Ha E normált tér, akkor az $(\widehat{E}, J)$ pár az E teljessé tétele, ahol*

$$\widehat{E} := \overline{\{\widehat{x} \mid x \in E\}} \subseteq E'', \tag{4.8}$$

a lezárás az E''-beli funkcionál-norma szerinti lezárás, J pedig az (4.7) *egyenlőséggel értelmezett kanonikus beágyazási operátor.*

Bizonyítás. Az (4.8)-beli értelmezése alapján világos, hogy $\widehat{E}$ zárt lineáris altere az E'' Banach-térnek, ezért maga is Banach-tér. Másfelől az 4.15 Tétel szerint a (4.7) alatti T operátor olyan lineáris izometria az E és E'' normált terek között, amely képterének lezárása megegyezik az $\widehat{E}$ altérrel, vagyis az $(\widehat{E}, J)$ pár az E normált tér teljessé tétele. ■

A normált terek teljessé tételének egy fontos tulajdonságát írjuk le a következő állításban:

4.19. Állítás. *Legyen $(\widehat{E}, V)$ az E normált tér teljessé tétele, akkor bármely F Banach-térhez és $A \in \mathscr{B}(E; F)$ folytonos lineáris operátorhoz létezik egyetlen olyan $\widehat{A} \in \mathscr{B}(\widehat{E}; F)$ folytonos lineáris operátor, amelyre $A = \widehat{A}V$:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "V"'] & & F \\ & \widehat{E} \arrow[ur, "\widehat{A}"'] & \end{tikzcd}$$

Továbbá $\widehat{A}$ normájára fennáll az $\|\widehat{A}\| = \|A\|$ egyenlőség.

Bizonyítás. Mivel V izometria, azért tetszőleges $x, y \in E$ vektorok esetén az $x = y$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $Vx = Vy$, ezért jóldefiniálit az alábbi

$$\widehat{A}(Vx) := Ax, \qquad x \in E$$

egyenlőséggel értelmezett $\widehat{A} : \operatorname{ran} V \to F$ függvény, amely nyilvánvalóan lineáris, továbbá az

$$\|\widehat{A}(Vx)\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = \|A\|\|Vx\|$$

becslés szerint $\widehat{A}$ folytonos és fennáll az $\|\widehat{A}\| \leq \|A\|$ egyenlőtlenség. A feltétel szerint a V operátor képtere sűrű lineáris altere az $\widehat{E}$ Banach-térnek, azért az 1.26 Tétel szerint az $\widehat{A}$ folytonos lineáris operátor egyértelműen kiterjeszthető $\widehat{E}$-ra a folytonosság, a linearitás és a norma megtartása mellett. Jelölje továbbra is $\widehat{A}$ ezt az operátort, akkor világos, hogy $\widehat{A} \in \mathscr{B}(\widehat{E}; F)$ és fennáll az $\widehat{A}V = A$ egyenlőség. Másfelől V izometrikussága miatt $\|V\| = 1$, amiből

$$\|A\| = \|\widehat{A}V\| \leq \|\widehat{A}\|\|V\| = \|\widehat{A}\|,$$

amiből $\|A\| \geq \|\widehat{A}\|$ figyelembevételével nyerjük az $\|\widehat{A}\| = \|A\|$ egyenlőséget. Végül ha B_1 és $B_2 \in \mathscr{B}(\widehat{E}; F)$ mindketten olyan operátorok, amelyekre $B_1 V = B_2 V = A$, akkor B_1 és B_2 olyan folytonos függvények, amelyek megegyeznek a $\operatorname{ran} V \subseteq \widehat{E}$ sűrű halmazon, amiből a $B_1 = B_2$ egyenlőség következik. ■

Az alábbi állítás prehilbert terek teljessé tételével foglalkozik:

4.20. Állítás. *Prehilbert tér teljessé tétele Hilbert-tér.*

Bizonyítás. Legyen E egy prehilbert-tér és legyen $(\mathcal{H}, V)$ az E egy teljessé tétele a 4.18 Tétel értelmében. Azt kell igazolnunk, hogy $\mathcal{H}$ normája egy alkalmas skaláris szorzatból származik, amihez a 3.8 Tétel szerint elegendő azt belátnunk, hogy $\mathcal{H}$ normája eleget tesz a paralelogramma-egyenlőségnek. Ehhez legyenek $h, k \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektorok, akkor léteznek olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok E-ben, hogy $Vx_n \to h$ és $Vy_n \to k$, akkor V izometrikussága és a norma folytonossága alapján

$$\|x_n\|^2 = \|Vx_n\|^2 \to \|h^2\|, \qquad \|y_n\|^2 = \|Vy_n\|^2 \to \|k\|^2,$$

és hasonlóképp $\|x_n + y_n\|^2 \to \|h + k\|^2$, illetve $\|x_n - y_n\|^2 \to \|h - k\|^2$, amiből már egyszerűen látható, hogy

$$\|h + k\|^2 + \|h - k\|^2 = 2\|h\|^2 + 2\|k\|^2,$$

vagyis $\mathcal{H}$ normájára fennáll a paralelogramma-egyenlőség. ■

4.4. Operátor Banach adjungáltja

Ebben a paragrafusban a Hilbert-terekkel némileg analóg módon értelmezni fogjuk normált térből normált térbe képező folytonos lineáris operátorok adjungáltját. Legyenek E és F ugyanazon $\mathbb{K}$ számtest feletti normált terek és legyen $A \in \mathscr{B}(E; F)$ egy folytonos lineáris operátor. Tetszőleges $f \in F'$ folytonos lineáris funkcionál esetén értelmezzük a

$$g(x) := f(Ax), \qquad x \in E$$

egyenlőséggel értelmezett $g : E \to \mathbb{K}$ (nyilvánvalóan lineáris) függvényt, amely a

$$|g(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\|\|A\|\|x\|$$

becslés szerint folytonos lineáris funkcionál az E normált téren, vagyis $g \in E'$. Tekinthetjük tehát az

$$A^* f := g,$$

vagyis az

$$(A^* f)(x) := f(Ax), \qquad x \in E \tag{4.9}$$

egyenlőséggel értelmezett $A^* : F' \to E'$ függvényt. Ezt az A^* leképeztést nevezzük az A operátor *Banach-adjungáltjának* (vagy röviden *adjungáltjának*).

4.21. Állítás. *Legyenek E és F normált terek és legyen $A \in \mathscr{B}(E;F)$ folytonos lineáris operátor. Ekkor A^* szintén folytonos lineáris operátor az F' és E' Banach terek között, továbbá a normájára fennáll az $\|A^*\| = \|A\|$ egyenlőség.*

Bizonyítás. Elsőként igazoljuk az A^* függvény linearitását: legyenek ugyanis $f_1, f_2 \in F'$ tetszőleges folytonos lineáris funkcionálok, akkor bármely $x \in E$ esetén fennáll, hogy

$$A^*(f_1 + f_2)(x) = (f_1 + f_2)(Ax) = f_1(Ax) + f_2(Ax) = (A^* f_1)(x) + (A^* f_2)(x),$$

amiből az $A^*(f_1 + f_2) = A^* f_1 + A^* f_2$ egyenlőség, vagyis A^* additivitása következik. Hasonlóan igazolható az A^* függvény homogenitása.

Megmutatjuk most, hogy A^* folytonos: legyen ugyanis $f \in F'$ tetszőleges, akkor az E'-beli funkcionálnorma és $A^* f$ definíciója alapján

$$\|A^* f\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(Ax)| \leq \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|f\| \cdot \|Ax\| = \|A\| \cdot \|f\|,$$

amiből kapjuk, hogy A^* folytonos és normájára fennáll az $\|A^*\| \leq \|A\|$ egyenlőtlenség. A fordított irányú egyenlőtlenséghez legyen $x \in E, \|x\| \leq 1$ tetszőleges vektor, akkor a 4.6 Tétel szerint az $Ax \in F$ vektorhoz létezik olyan $f \in F', \|f\| = 1$ folytonos lineáris funkcionál, amelyre $f(Ax) = \|Ax\|$, azért fennáll, hogy

$$\|A^*\| \geq \|A^* f\| \geq |(A^* f)(x)| = |f(Ax)| = \|Ax\|,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\|A^*\| \geq \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|,$$

amiből az $\|A^*\| \geq \|A\|$ és egyúttal a tétel állítása is következik. ■

A Banach-adjungált algebrai műveletekkel való kapcsolatát írja le az alábbi

4.22. Állítás. *Legyen E normált tér és legyenek $A, B \in \mathscr{B}(E)$ folytonos lineáris operátorok és legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor fennállnak az alábbiak:*

(a) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
(b) $(\lambda A) = \lambda A^*$,
(c) $(AB)^* = B^* A^*$.

Bizonyítás. Egyszerű számolással ellenőrizhető. ■

Emlékeztetünk rá, hogy $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek esetén bármely $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ folytonos lineáris operátor esetén igaz az $A^{**} = A$ összefüggés, ahol A^{**} az A operátor második Hilbert-adjungáltját jelöli. Ha E és F tetszőleges normált terek és $A \in \mathscr{B}(E;F)$ tetszőleges operátor, akkor az A^{**} második adjungált operátor az E'' biduális téren értelmezett F''

biduális térbe képező függvény, így természetesen az A és A^{**} operátorok nem lehetnek egyenlőek.

Vezessük be E és F normált terek esetén az alábbi

$$\begin{aligned} J_E(x) &:= \widehat{x}, \qquad x \in E, \\ J_F(y) &:= \widehat{y}. \qquad y \in F, \end{aligned}$$

egyenlőséggel értelmezett $J_E : E \to E''$, illetve $J_F : F \to F''$ kanonikus operátorokat. Láttuk, hogy a J_E és J_F operátorok lineáris izometriák, ezért az $E \cong J_E\langle E\rangle$ és $F \cong J_F\langle F\rangle$ azonosítások mentén az E, illetve F normált terek az E'', illetve F'' biduális terek altereinek tekinthetők. Az így bevezetett azonosítások után már könnyen igazolható, hogy az A^{**} második adjungált operátor *kiterjeszti* az A opertátort, pontosabban fennáll az alábbi

4.23. Állítás. *Legyenek E és F normált terek és legyen $A \in \mathscr{B}(E; F)$ folytonos lineáris operátor, akkor az A^{**} második adjungált operátorra fennáll, hogy*

$$J_F A = A^{**} J_E,$$

vagyis az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[d, "J_E"'] & F \arrow[d, "J_F"] \\ E'' \arrow[r, "A^{**}"'] & F'' \end{tikzcd}$$

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy bármely $x \in E$ mellett fennáll az

$$\widehat{Ax} = A^{**}\widehat{x} \tag{4.10}$$

összefüggés, aminek igazolásához legyen $f \in F'$, akkor

$$\widehat{Ax}(f) = f(Ax) = (A^* f)(x) = \widehat{x}(A^* f) = (A^{**}\widehat{x})(f),$$

ahol az utolsó egyenlőségben azt használtuk, hogy az $A^{**} := (A^*)^* : E'' \to F''$ második adjungált operátorra definíció szerint fennáll, hogy

$$(A^{**}v)(f) = v(A^* f), \qquad v \in E'', f \in F'.$$

Ezzel tehát igazoltuk, hogy bármely $f \in F'$ funkcionál esetén fennáll az $\widehat{Ax}(f) = A^{**}\widehat{x}(f)$ egyenlőség, amivel a (4.10) egyenlőséget, és egyúttal az állítást is igazoltuk. ∎

4.24. Állítás. *Ha V izometrikus izomorfizmus az E_1 és E_2 Banach-terek között, akkor V^* is izometrikus izomorfizmus az E_2' és E_1' Banach-terek között.*

Bizonyítás. Elsőként igazoljuk, hogy $V^* : E_2' \to E_1'$ izometria. Mivel $\|V^*\| = \|V\| = 1$, azért bármely $f_2 \in E_2'$ esetén $\|V^* f_2\| \le \|f_2\|$. Megfordítva, ha $f_2 \in E_2'$ és $x_2 \in E_2$, $\|x_2\| \le 1$ egy rögzített vektor, akkor a feltétel szerint $x_1 := V^{-1}x_2$ olyan E_1-beli vektor, hogy $\|x_1\| \le 1$ és $x_2 = Vx_1$, ezért

$$|f_2(x_2)| = |f_2(Vx_1)| = |(V^* f_2)(x_1)| \le \|V^* f_2\|,$$

amiből $\|f_2\| \leq \|V^* f_2\|$ következik. Ezzel megmutattuk, hogy V^* izometria. A V^* operátor szürjektivitásának igazolásához legyen $f_1 \in E_1'$ és jelölje $f_2 := f_1 \circ V^{-1}$, akkor $f_2 \in E_2'$ és $V^* f_2 = f_2 \circ V = f_1$, amiből következik, hogy V^* szürjektív. ■

Megjegyezzük, hogy ha E normált tér, akkor $x \in E$ és $f \in E'$ esetén szokás az alábbi

$$\langle x, f \rangle := f(x)$$

jelölést alkalmazni. Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti egyenlőséggel értelmezett $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E' \to \mathbb{K}$ leképezés olyan bilineáris függvény, amely eleget tesz az alábbi ún. *dualitási feltételeknek*:

(1) ha minden $x \in E$ mellett $\langle x, f \rangle = 0$ valamely $E' \ni f$-re, akkor $f = 0$,
(2) ha minden $f \in E'$ mellett $\langle x, f \rangle = 0$ valamely $E \ni x$-re, akkor $x = 0$.

Ezt az $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E' \to \mathbb{K}$ függvényt nevezzük az E és E' terek közti *kanonikus dualitásnak.*

Legyen most adott E mellett egy F normált tér is és legyen $A \in \mathscr{B}(E; F)$ egy folytonos lineáris operátor, akkor az F és F' terek közti kanonikus dualitást szintén $\langle \cdot, \cdot \rangle$ szimbólummal jelölve az A^* adjungált operátort definiáló (4.9) egyenlőség az alábbi

$$\langle Ax, f \rangle = \langle x, A^* f \rangle, \qquad x \in E, f \in F' \tag{4.11}$$

alakra írható át.

4.5. Reflexív Banach-terek és a gyenge konvergencia

Az alábbiakban bevezetjük a Banach-terek egy fontos osztályának fogalmát:

4.25. Definíció. Az E normált teret *reflexívnek* nevezzük, ha a (4.7) alatti $J : E \to E''$ kanonikus leképezés szürjektív.

Nem nehéz igazolni, hogy egy E normált tér pontosan akkor Banach-tér, ha a (4.7) egyenlőséggel értelmezett J leképezés képtere zárt E''-ben. Ha E reflexív normált tér, akkor ez a feltétel triviális módon teljesül, vagyis ilyenkor tehát J izometrikus izomorfizmus az E normált tér és az E'' Banach-tér között. Ebből nyilvánvaló az alábbi

4.26. Állítás. *Minden reflexív normált tér Banach-tér.*

A fenti állítás megfordítása nem igaz, vagyis léteznek nem reflexív Banach-terek is. Megjegyezzük továbbá, hogy az E Banach-tér reflexivitása nem csupán annyit jelent, hogy E izometrikusan izomorf a saját topologikus biduálisával, hanem azt is, hogy a (4.7) alatti J leképezés maga is izomorfizmus. Létezik ugyanis olyan Banach-tér, amely izometrikusan izomorf a biduálisával, de a J kanonikus leképezés nem szürjektív (ilyen Banach-térre elsőként R. C. James mutatott példát 1950-ben).

4.27. Állítás. *Reflexív Banach-tér minden zárt lineáris altere is reflexív.*

Bizonyítás. Legyen E_0 az E reflexív Banach-tér egy zárt lineáris altere és jelölje rendre E_0', illetve E_0'' az E_0 duális és biduális terét. Legyen $w_0 \in E_0''$ és $f \in E'$, akkor világos, hogy az f E_0-ra vett megszorítása folytonos lineáris funkcionál, vagyis $f|_{E_0} \in E_0'$, ezért jól definiált a

$$w(f) := w_0(f|_{E_0}), \qquad f \in E' \tag{4.12}$$

egyenlőséggel értelmezett $w : E' \to \mathbb{K}$ függvény, mely nyilvánvalóan folytonos lineáris funkcionál, vagyis $w \in E''$. Az E reflexivitása alapján létezik olyan $x \in E$ vektor, amely mellett w előáll $w = \widehat{x}$ alakban, vagyis fennáll a

$$w(f) = f(x), \qquad f \in E' \tag{4.13}$$

azonosság. Megmutatjuk, hogy $x \in E_0$. Tegyük fel ui. hogy nem így van, akkor az E_0 lineáris altér zártságát kihasználva, a 4.9 Következmény szerint létezik olyan $f \in E'$ folytonos lineáris funkcionál, hogy $f(x) = 1$ és $f|_{E_0} = 0$, azonban ekkor a (4.12) és (4.13) azonosságokat felhasználva az

$$1 = f(x) = w(f) = w_0(f|_{E_0}) = 0,$$

hamis egyenlőségre jutunk. Ezzel megmutattuk, hogy $x \in E_0$. Az E_0 Banach-tér reflexivitása igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy fennáll a

$$w_0(f_0) = f_0(x), \qquad f_0 \in E_0' \tag{4.14}$$

egyenlőség. Legyen $f_0 \in E_0'$ egy tetszőleges folytonos lineáris funkcionál, akkor a 4.5 Következmény szerint létezik olyan $f \in E'$, amely az f_0 (normatartó) kiterjesztése. A (4.12) és (4.13) azonosságok felhasználásával kapjuk, hogy

$$w_0(f_0) = w_0(f|_{E_0}) = w(f) = f(x) = f_0(x),$$

amivel a (4.14) egyenlőséget és egyúttal az Állítást is igazoltuk. ■

4.28. Lemma. *Ha az E_1 és E_2 Banach-terek izometrikusan izomorfak, akkor E_1 pontosan akkor reflexív, ha E_2 reflexív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az E_2 Banach-tér reflexív és $V : E_1 \to E_2$ izometrikus izomorfizmus, megmutatjuk, hogy ekkor E_2 is reflexív. Jelölje ui. J_i, $(i = 1, 2)$, a megfelelő $E_i \to E_i''$ kanonikus beágyazási operátorokat, akkor a feltétel szerint J_2 bijektív, továbbá a 4.24 Állítás szerint a $V^{**} : E_1'' \to E_2''$ operátor olyan izometrikus izomorfizmus, amely kommutatívvá teszi az alábbi ábrát:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "V"] \arrow[d, "J_1"'] & E_2 \arrow[d, "J_2"] \\ E_1'' \arrow[r, "V^{**}"'] & E_2'' \end{tikzcd}$$

Ez azt jelenti, hogy J_1 előáll $J_1 = (V^{**})^{-1} J_2 V$ alakban, ahol az előállításban szereplő valamennyi operátor bijekció, így J_1 is bijektív, vagyis az E_1 Banach-tér reflexív. ■

4.29. Állítás. *Egy Banach-tér pontosan akkor reflexív, ha a duálisa reflexív.*

Bizonyítás. Legyen E egy reflexív Banach-tér, megmutatjuk, hogy E' szintén reflexív. Legyen $F \in E'''$, azt kell megmutatnunk, hogy F előáll $F = \widehat{f}$ alakban valamely $f \in E'$ funkcionál mellett, azaz fennáll az

$$F(w) = w(f), \qquad w \in E'' \tag{4.15}$$

egyenlőség. Definiáljuk az $f : E \to \mathbb{K}$ függvényt az

$$f(x) \coloneqq F(\widehat{x}), \qquad x \in E$$

hozzárendelésen keresztül, akkor világos, hogy $f \in E'$. Ha $w \in E''$, akkor az E reflexivitása miatt w előáll $w = \widehat{x}$ alakban valamely $x \in E$ vektorra, és ezért

$$F(w) = F(\widehat{x}) = f(x) = \widehat{x}(f) = w(f),$$

vagyis f eleget tesz a (4.15) azonosságnak, amivel megmutattuk, hogy E' reflexív.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az E Banach-tér E' duálisa reflexív, akkor a bizonyítás első fele alapján E'' is reflexív. Mivel E Banach-tér, azért

$$\widehat{E} \coloneqq \{\widehat{x} \mid x \in E\}$$

zárt lineáris altér E''-ben, így a 4.27 Állítás szerint $\widehat{E}$ is reflexív. Mivel az E és $\widehat{E}$ Banach-terek izometrikusan izomorfak (éspedig a $Jx = \widehat{x}, (x \in E)$ operátor által), azért a 4.28 Lemma szerint E is reflexív. ■

4.30. Állítás. *Ha az E normált tér duálisa szeparábilis, akkor E maga is szeparábilis.*

Bizonyítás. Nem nehéz igazolni, hogy ha az E' duális tér szeparábilis, akkor abban a funkcionálnorma szerinti egységgömb felszíne, vagyis az

$$S' \coloneqq \{f \in E' \mid \|f\| = 1\}$$

halmaz is szeparábilis. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan S'-ben haladó sorozat, hogy $\{f_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ sűrű S'-ben, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-beli sorozat, hogy minden n mellett $\|x_n\| = 1$ és $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$. Megmutatjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ által kifeszített altér sűrű E-ben, ami ekvivalens azzal, hogy E szeparábilis. Jelölje E_0 a kérdéses altér lezárását és tegyük fel indirekt módon, hogy $E_0 \neq E$. Ha $x \in E \setminus E_0$ egy tetszőleges vektor, akkor a 4.9 Következmény szerint létezik olyan $f \in S'$ funkcionál, hogy $f(x) = 1$ és $f|_{E_0} = 0$, speciálisan minden n-re $f(x_n) = 0$. Ugyanakkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra tett feltevés szerint létezik olyan n index, hogy $\|f_n - f\| < \frac{1}{2}$, és ezért

$$\frac{1}{2} > \|f_n - f\| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2},$$

vagyis ellentmondásra jutottunk. ■

A 4.29 és a 4.30 Állítások alkalmazásával adódik az alábbi

4.31. Következmény. *Egy reflexív Banach-tér pontosan akkor szeparábilis, ha a duálisa szeparábilis.*

Megjegyezzük, hogy a fenti állítás nem igaz tetszőleges Banach-térre, ui. az ℓ^1 Banach-tér ugyan szeparábilis, azonban annak duálisa izometrikusan izomorf az ℓ^∞ nem szeparábilis Banach-térrel, ezért $(\ell^1)'$ nem szeparábilis.

4.32. Definíció. Az E normált térben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot *gyengén konvergensnek* nevezzük, ha létezik olyan $x \in E$ vektor, hogy minden $f \in E'$ funkcionálra $f(x_n) \to f(x)$. Ilyenkor az $x \in E$ vektort az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat *gyenge limeszének* nevezzük.

Nem nehéz belátni, hogy egy gyengén konvergens sorozat gyenge limesze egyértelmű. Valóban, ha az x és $y \in E$ vektorok mindketten az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat gyenge limeszei, akkor minden $f \in E'$ funkcionál mellett $f(x) = f(y)$ teljesül, amiből a 4.8 Következmény szerint $x = y$ következik.

Szintén magától értetődő módon adódik, hogy bármely normában konvergens sorozat gyengén is konvergens, azonban a megfordítás általában nem igaz: bármely végtelen dimenziós Hilbert-térben haladó ortonormált sorozat gyengén konvergál a nullához, azonban világos, hogy egy ilyen sorozat nem lehet a norma szerint konvergens.

A következő tétel egyfajta „gyenge kompaktsági" eredménynek tekinthető reflexív Banach-terekben:

4.33. Tétel. *Reflexív Banach-térben bármely korlátos sorozatnak létezik gyengén konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az E reflexív Banach-tér *szeparábilis*, és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E'-beli sorozat, hogy az $\{f_n \,|\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ halmaz sűrű E'-ben. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E-ben haladó korlátos sorozat és legyen $M \geq 0$ olyan, hogy minden n-re $\|x_n\| \leq M$. Mivel az $(f_0(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat korlátos, azért a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint létezik olyan $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény és $c_0 \in \mathbb{K}$ szám, hogy

$$f_0(x_{\sigma_0(n)}) \to c_0.$$

Az $(f_1(x_{\sigma_0(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat szintén korlátos, ezért ugyanezen elv szerint létezik olyan $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény és $c_1 \in \mathbb{K}$ szám, hogy $\sigma_1 := \sigma_0 \circ \tau$ jelölést bevezetve $f_1(x_{\sigma_1(n)}) \to c_1$. Mivel $(x_{\sigma_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ az $(x_{\sigma_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ egy részsorozata, azért világos, hogy

$$f_j(x_{\sigma_1(n)}) \to c_j, \qquad j = 0, 1.$$

Ezt az eljárást folytatva rekurzióval kapjuk olyan $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ és $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozatok létezését, hogy minden i-re $\sigma_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény és $c_i \in \mathbb{K}$ olyan, hogy bármely $j \leq i$ esetén $(x_{\sigma_i(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ az $(x_{\sigma_j(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ egy részsorozata és

$$f_j(x_{\sigma_i(n)}) \to c_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, i.$$

Vezessük be a $\sigma(n) := \sigma_n(n)$ egyenlőséggel értelmezett $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, akkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy σ szigorúan monoton növő és

$$f_i(x_{\sigma(n)}) \to c_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Megmutatjuk, hogy az $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat gyengén konvergens. Ehhez először rögzítsünk egy $f \in E'$ funkcionált, megmutatjuk, hogy $(f(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens. Legyen ui. $\varepsilon > 0$ egy adott pozitív szám és legyen $i \in \mathbb{N}$ olyan index, hogy $\|f_i - f\| < \varepsilon$, és válasszunk olyan N indexet, hogy bármely $n, m \geq N$ számok esetén $|f_i(x_{\sigma(n)}) - f_i(x_{\sigma(m)})| < \varepsilon$, akkor

$$\begin{aligned} &|f(x_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(m)})| \\ &\qquad \leq |f(x_{\sigma(n)}) - f_i(x_{\sigma(n)})| + |f_i(x_{\sigma(n)}) - f_i(x_{\sigma(m)})| + |f(x_{\sigma(m)}) - f_i(x_{\sigma(m)})| \\ &\qquad \leq (2M + 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

amiből leolvasható, hogy az $(f(x_{\sigma(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-tulajdonságú, ezért konvergens. Vezessük be ezután a

$$w(f) := \lim_{n\to\infty} f(x_{\sigma(n)}), \qquad f \in E'$$

egyenlőséggel definiált $w : E' \to \mathbb{K}$ függvényt, amely nyilvánvalóan lineáris és a

$$|w(f)| \leq M \cdot \|f\|, \qquad f \in E'$$

becslés szerint folytonos, tehát $w \in E''$. Az E reflexivitása folytán w előáll $w = \widehat{x}$ alakban valamely $x \in E$ vektorra, ekkor bármely $f \in E'$ mellett fennáll, hogy

$$f(x) = \widehat{x}(f) = w(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\sigma(n)}),$$

ami éppen azt jelenti, hogy $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gyengén konvergál az x vektorhoz.

Az általános eset igazolásához legyen E egy tetszőleges (tehát nem feltétlenül szeparábilis) reflexív Banach-tér és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E-ben haladó korlátos sorozat. Jelölje E_0 e sorozat tagjai által kifeszített zárt lineáris alteret, akkor E_0 szeparábilis, és a 4.27 Állítás szerint reflexív Banach-tér. A bizonyítás első fele szerint létezik olyan $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $x \in E_0$ vektor, hogy bármely $f_0 \in E_0'$ funkcionálra $f_0(x_n) \to f_0(x)$. Világos, hogy ha $f \in E'$, akkor $f_0 = f|_{E_0}$ jelöléssel $f_0 \in E_0'$, ezért fennáll, hogy

$$f(x_{\sigma(n)}) = f_0(x_{\sigma(n)}) \to f_0(x) = f(x),$$

amivel megmutattuk, hogy $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gyengén konvergál az x vektorhoz. ∎

Megjegyezzük, hogy a tétel hipotéziséből az E Banach-tér reflexivitása nem hagyható el. Tekintsük ui. az ℓ^1 Banach-térben az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, ahol $e_n(k) = \delta_{n,k}$, akkor könnyen igazolható, hogy az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozatból nem választható ki gyengén konvergens részsorozat.

5. FEJEZET

Duális terek és reprezentációik

5.1. Véges dimenziós normált terek duálisa

A korábbiakban láttuk, hogy ha E véges dimenziós normált tér, akkor E felett minden funkcionál folytonos, speciálisan ilyenkor fennáll az

$$E' = E^*$$

egyenlőség.

5.1. Lemma. *Legyen E véges dimenziós vektortér és legyen $e_1, \ldots, e_n$ az E egy bázisa, akkor léteznek olyan $f_1, \ldots, f_n$ lineáris funkcionálok E^*-ban, amelyek az E^* egy bázisát adják, emellett fennáll, hogy*

$$f_j(e_k) = \delta_{j,k}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Bizonyítás. Legyen $x \in E$ egy tetszőleges vektor, akkor a feltétel szerint x egyértelműen előáll

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

alakban valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ számokra, ezért rögzített j mellett jól értelmezett az az $f_j : E \to \mathbb{K}$ függvény, amelyet az

$$f_j(x) := \alpha_j, \qquad x \in E$$

egyenlőséggel értelmezünk. Könnyen látható, hogy f_j lineáris, emellett

$$f_j(e_k) = \delta_{j,k}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Megmutatjuk, hogy $f_1, \ldots, f_n$ bázist alkot az E^* duális térben. Valóban, ha $\beta_1, \ldots, \beta_n$ olyan számok, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j = 0,$$

akkor bármely rögzített k-ra is

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j(e_k) = \beta_k$$

teljesül, vagyis $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$, amivel megmutattuk, hogy $f_1, \ldots, f_n$ lineárisan függetlenek. Legyen ezután $f \in E^*$ egy tetszőleges lineáris funkcionál és jelölje

$$\beta_k := f(e_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

illetve legyen

$$g := \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j,$$

akkor bármely rögzített k mellett

$$g(e_k) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j(e_k) = \beta_k = f(e_k),$$

amiből a $g = f$ egyenlőség már következik. Ezzel megmutattuk, hogy az $f_1, \ldots, f_n$ funkcionálok generálják E^*-ot, vagyis E^* egy bázisát adják. ■

5.2. Definíció. Az 5.1 Lemma feltételeinek eleget tevő bázisokat *Auerbach-bázisoknak* nevezzük.

5.3. Következmény. *Ha E véges dimenziós normált tér, akkor E' is véges dimenziós, emellett* $\dim(E) = \dim(E')$.

5.4. Tétel. *Minden véges dimenziós normált tér reflexív.*

Bizonyítás. Mivel $\dim(E) = \dim(E'')$, azért a $J : E \to E''$ kanonikus leképezés injektivitásából következik annak szürjektivitása is, ami pedig definíció szerint éppen azt jelenti, hogy E reflexív. ■

Az 5.1 Lemmát a Hahn–Banach-tétellel kombinálva kapjuk az alábbi gyakorta hasznos eredményt:

5.5. Állítás. *Legyen E (tetszőleges dimenziójú) normált tér és legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ lineárisan független vektorok, akkor léteznek olyan E'-beli $f_1, f_2, \ldots, f_n$ folytonos lineáris funkcionálok, hogy*

$$f_j(e_k) = \delta_{j,k}, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Bizonyítás. Jelölje E_0 az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorok által generált E-beli véges dimenziós lineáris alteret, akkor az 5.1 Lemma szerint léteznek olyan $g_1, \ldots, g_n : E_0 \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionálok, hogy

$$g_j(e_k) = \delta_{j,k}, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Az E_0 altér véges dimenziós, ezért a g_j funkcionálok mindegyike folytonos. A Hahn–Banach-tétel szerint léteznek olyan $f_1, \ldots, f_n \in E'$ folytonos lineáris funkcionálok, hogy

$$g_j \subset f_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

amiből az eddigiek alapján könnyen látható, hogy az $f_1, \ldots, f_n$ funkcionál rendszer eleget tesz az előírt feltételeknek. ■

5.2. Sorozatterek duálisa

Ebben a fejezetben elsőként adott $1 \leq p < +\infty$ szám mellett megvizsgáljuk az ℓ^p sorozatterek duálisát.

Legyen először $1 < p < +\infty$ és jelölje q a p szám konjugáltját, vagyis amelyre $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Rögzítsünk egy $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ sorozatot, akkor bármely $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ sorozatra a Hölder-egyenlőtlenség alapján fennáll, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p\|y\|_q,$$

amiből leolvasható, hogy az alábbi

$$f_y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

egyenlőséggel értelmezett $f_y : \ell^p \to \mathbb{K}$ leképezés jóldefiniált folytonos lineáris funkcionál, és f_y funkcionálnormájára fennáll az $\|f_y\| \leq \|y\|_q$ egyenlőtelenség. Jelölje rögzített $y \in \ell^q$ esetén

$$Ty := f_y,$$

vagyis $T : \ell^q \to (\ell^p)'$ az alábbi

$$(Ty)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x \in \ell^p, y \in \ell^q \tag{5.1}$$

egyenlőséggel értelmezett operátor. Világos, hogy T lineáris operátor, továbbá a

$$\|Ty\| = \|f_y\| \leq \|y\|, \qquad y \in \ell^q$$

egyenlőtlenségből következik, hogy T folytonos és $\|T\| \leq 1$. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy T szürjektív és izometrikus, vagyis T izometrikus izomorfizmust létesít az ℓ^q sorozattér valamint az $(\ell^p)'$ duális tér között.

E tétel bizonyítása során szükségünk lesz számsorozatok mellett ℓ^p-ben haladó sorozatokra is, vagyis olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, ahol minden n-re $x_n \in \ell^p$. A félreértések elkerülése végett megállapodunk abban, hogy a következőkben egy adott $x \in \ell^p$ sorozat n-edik elemét az $x(n)$ szimbólummal, míg egy ℓ^p-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat n-edik elemét az x_n szimbólummal jelöljük.

5.6. Tétel. *Legyen $1 < p < +\infty$ rögzített pozitív szám és legyen q a p szám konjugáltja, akkor a* (5.1) *egyenlőségen keresztül definiált $T : \ell^q \to (\ell^p)'$ leképezés izometrikus izomorfizmus.*

Bizonyítás. Az eddigi észrevételek alapján elegendő megmutatjuk, hogy T szürjektív és izometrikus, amihez a $\|T\| \leq 1$ becslés figyelembevételével elegendő azt belátnunk, hogy bármely $f \in (\ell^p)'$ funkcionálhoz létezik $y \in \ell^q$, hogy $f = f_y$, továbbá $\|f_y\| \geq \|y\|_q$. Legyen tehát $f \in (\ell^p)'$ egy folytonos lineáris funkcionál és jelölje rögzített n természetes szám mellett e_n az n-edik kanonikus ℓ^p-beli egységvektort, vagyis $e_n \in \ell^p$ az a sorozat, amelyre

$$e_n(k) = \delta_{n,k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

ahol $\delta_{n,k}$ a jól ismert Kronecker-szimbólum. Jelölje y azt a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatot, amelyre

$$y(n) = f(e_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Megmutatjuk, hogy $y \in \ell^q$, $f = f_y$ és $\|f_y\| \geq \|y\|_q$. Értelmezzük ehhez az x numerikus sorozatot a következőképp

$$x(n) := \begin{cases} \frac{|y(n)|^q}{y(n)}, & \text{ha } y(n) \neq 0, \\ 0, & \text{ha } y(n) = 0. \end{cases}$$

Az x sorozat definíciója alapján és a $q = p(q-1)$ feltételből kapjuk, hogy minden N természetes számra

$$\sum_{n=0}^{N} |x(n)|^p = \sum_{n=0}^{N} |y(n)|^{p(q-1)} = \sum_{n=0}^{N} |y(n)|^q, \tag{5.2}$$

illetve ismét x definíciója alapján

$$\sum_{n=0}^{N} |y(n)|^q = \sum_{n=0}^{N} x(n)y(n) = \sum_{n=0}^{N} x(n)f(e_n) = f\Big(\sum_{n=0}^{N} x(n)e_n\Big) \leq \|f\| \cdot \|s_N\|_p,$$

ahol bevezettük az $s_N := \sum\limits_{n=0}^{N} x(n)e_n \in \ell^p$ jelölést. Vegyük észre, hogy itt az (5.2) egyenlőség miatt

$$\|s_N\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{N} |x(n)|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{n=0}^{N} |y(n)|^q\Big)^{1/p},$$

ezért az eddigiek alapján a

$$\sum_{n=0}^{N} |y(n)|^q \leq \|f\| \cdot \Big(\sum_{n=0}^{N} |y(n)|^q\Big)^{1/p} = \|f\| \cdot \Big(\sum_{n=0}^{N} |y(n)|^q\Big)^{1-1/q}$$

becsléshez jutunk, amiből átrendezés után nyerjük, hogy bármely N szám mellett

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} |y(n)|^q\Big)^{1/q} \leq \|f\|.$$

Ebből pedig már következik, hogy $y \in \ell^q$ és $\|y\|_q \leq \|f\|$. A bizonyítás befejezéséhez elegendő az $f = f_y$ egyenlőséget ellenőrizni. Ez viszont nyilvánvalóan következik abból, hogy bármely véges tartójú $x \in \ell^p$ sorozatra elég nagy N esetén fennáll az

$$x = \sum_{n=0}^{N} x(n)e_n$$

egyenlőség, ezért az $y \in \ell^q$ konstrukciója alapján kapjuk, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} x(n)f(e_n) = \sum_{n=0}^{N} x(n)y(n) = f_y(x),$$

vagyis f és f_y megegyezik a véges tartójú sorozatok halmazán. Mivel az ilyen tulajdonságú sorozatok sűrű halmazt alkotnak ℓ^p-ben, azért $f = f_y$, amivel a T operátor szürjektivitását és egyúttal a tételt is igazoltuk. ∎

A következőkben meghatározzuk az ℓ^1 sorozattér duálisát. Rögzítsünk ui. egy $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ sorozatot, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy az

$$f_y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$$

egyenlőséggel definiált $f_y : \ell^1 \to \mathbb{K}$ függvény jól definiált folytonos lineáris funkcionál, éspedig $\|f_y\| \le \|y\|_\infty$. Jelölje rögzített $y \in \ell^\infty$ esetén

$$Ty := f_y,$$

vagyis $T : \ell^\infty \to (\ell^1)'$ az alábbi

$$(Ty)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x \in \ell^1, y \in \ell^\infty \tag{5.3}$$

egyenlőséggel értelmezett leképezés. Az eddigiek alapján világos, hogy T lineáris operátor és $\|T\| \le 1$. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy T izometrikus izomorfizmust létesít az ℓ^∞ sorozattér valamint az $(\ell^1)'$ duális tér között:

5.7. Tétel. *Az (5.3) egyenlőségen keresztül értelmezett $T : \ell^\infty \to (\ell^1)'$ operátor izometrikus izomorfizmus.*

Bizonyítás. Az 5.6 Tétel bizonyításához hasolóan járunk el. Legyen $f \in (\ell^1)'$ folytonos lineáris funkcionál, jelölje rögzített n természetes szám mellett e_n a kanonikus ℓ^1-beli egységvektort, és jelölje y azt a $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatot, amelyre

$$y(n) = f(e_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Könnyen látható, hogy minden n-re $|y(n)| \le \|f\|$, ezért $y \in \ell^\infty$ és $\|y\|_\infty \le \|f\|$. Másfelől ha $x \in \ell^1$ egy véges tartójú sorozat, akkor elég nagy N index mellett x előáll

$$x = \sum_{n=0}^{N} x(n) e_n$$

alakban és ezért y konstrukciója alapján

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} x(n) f(e_n) = f_y(x).$$

Mivel a véges tartójú sorozatok sűrű halmazt alkotnak ℓ^1-ben, azért ebből az $f = f_y = Ty$ egyenlőség már következik. ■

Az 5.6 és az 5.7 Tételek eredményét összefoglalva adódik az alábbi

5.8. Következmény. *Legyen $1 < p < +\infty$ esetén $q > 1$ az a szám, amelyre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, illetve $p = 1$ esetén legyen $q := +\infty$. Ekkor az ℓ^p sorozattér $(\ell^p)'$ duálisa azonosul az ℓ^q sorozattérrel, éspedig a*

$$(Ty)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x \in \ell^p, y \in \ell^q$$

izometrikus izomorfizmuson keresztül.

Végül rögzített $y \in \ell^1$ mellett tekintsük az

$$f_y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x \in \ell^\infty$$

egyenlőséggel értelmezett $f_y : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ függvényt, mely nyilvánvalóan folytonos lineáris funkcionál, éspedig $\|f_y\| \leq \|y\|_1$. A fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy a $Ty := f_y$, $(y \in \ell^1)$ egyenlőséggel definiált $T : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ operátor izometria, azonban nem szürjektív:

5.9. Tétel. *Az alábbi*

$$(Ty)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x \in \ell^\infty, y \in \ell^1$$

egyenlőséggel értelmezett $T : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ operátor izometrikus, de nem szürjektív.

Bizonyítás. Legyen $L \in (\ell^\infty)'$ egy Banach-limesz, akkor tehát bármely $x \in \ell^\infty$ konvergens sorozatra

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Tegyük fel, hogy L előáll

$$L(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x \in \ell^\infty$$

alakban valamely $y \in \ell^1$ sorozatra. Legyen x az $x_n := \overline{y_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ egyenlőséggel értelmezett sorozat, akkor $x \in \ell^\infty$, illetve $y \in \ell^1$ miatt $z_n \to 0$, ezért L értelmezése folytán

$$0 = L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2,$$

vagyis $y = 0$. Ez viszont lehetetlen, ui. az $L = 0$ zérus funkcionál nem Banach-limesz. ■

Megjegyezzük, hogy a tételt bizonyíthattuk volna a 4.30 Állításon keresztül is, éspedig a következőképp: ha a T leképezés szürjektív volna, akkor az ℓ^1 és $(\ell^\infty)'$ terek izometrikusan izomorfak volnának. Ez azt jelentené, hogy az $(\ell^\infty)'$ duális tér szeparábilis, és vele együtt a 4.30 Állítás szerint ℓ^∞ maga is szeparábilis, ami nem igaz.

Vegyük észre, hogy ez utóbbi észrevétel szerint az ℓ^1 és $(\ell^\infty)'$ terek között nem csupán az 5.9 Tételben definiált T leképezés, de semmilyen más operátor sem létesíthet izometrikus izomorfizmust.

Végezetül megmutatjuk, hogy az ℓ^1 sorozattér maga is duális tér, éspedig a zérus sorozatok c_0 terének duális tere:

5.10. Tétel. *Jelölje c_0 a supremum-normával ellátott $\mathbb{K}$-beli zérussorozatok Banach-terét, akkor az alábbi*

$$(Ty)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad x \in c_0, y \in \ell^1$$

egyenlőséggel értelmezett $T : \ell^1 \to (c_0)'$ leképezés izometrikus izomorfizmus.

Bizonyítás. Az eddigiekhez hasonlóan egyszerűen igazolható, hogy T jóldefiniált folytonos lineáris operátor, és $\|T\| \leq 1$. Megmutatjuk, hogy T szürjektív és izometrikus. Legyen ui. $f \in (c_0)'$ egy folytonos lineáris funkcionál és jelölje e_n az n-edik c_0 beli egységvektort.

Definiáljuk az y sorozatot az $y_n := f(e_n)$ egyenlőséggel. Megmutatjuk, hogy $y \in \ell^1$, és $Ty = f_y$ jelöléssel $\|y\|_1 \leq \|f_y\|$ és $f_y = f$. Jelölje ui. rögzített N természetes szám mellett

$$s_N(k) := \begin{cases} \frac{\overline{y_k}}{|y_k|}, & k \leq N, y_k \neq 0 \\ 0, & \text{amúgy.} \end{cases}$$

Világos, hogy $s_N \in c_0$ és $\|s_N\|_\infty \leq 1$, ezért minden N-re

$$\|f\| \geq |f(s_N)| = \sum_{k=0}^{N} |y_k|,$$

következésképp $y \in \ell^1$ és $\|y\|_1 \leq \|f\|$. Végül az eddigiekhez hasonlóan igazolható, hogy $f_y(x) = f(x)$ teljesül bármely x véges tartójú sorozatra, amiből az $f_y = f$ egyenlőség már következik. ∎

Végezetül a fent említett sorozatterek reflexivitásával foglalkozunk. A korábbiakban láttuk, hogy egy Banach-tér pontosan akkor reflexív, ha a duálisa reflexív, valamint egy refexív és szeparábilis Banach-tér duális tere maga is szeparábilis. Ezen észrevételek, és az 5.7 és 5.10 Tételek alapján világos, hogy a c_0, ℓ^1 és ℓ^∞ terek egyike sem reflexív.

Nem nehéz azonban belátni, hogy minden $1 < p < +\infty$ esetén ℓ^p reflexív. Legyen ui. $w \in (\ell^p)''$ egy folytonos lineáris funkcionál, azt kell igazolnunk, hogy w előáll $w = \widehat{x}$ alakban valamely $x \in \ell^p$ sorozatra, vagyis

$$w(f) = f(x), \qquad f \in (\ell^p)'.$$

Mivel az 5.6 Tétel értelmében minden $f \in (\ell^p)'$ funkcionál egyértelműen előáll $f = f_y$ alakban valamely (egyértelmű) $y \in \ell^q$ sorozat mellett, ezért a reflexivitás igazolásához elegendő olyan $x \in \ell^p$ sorozatot mutatnunk, amelyre

$$w(f_y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad y \in \ell^q. \tag{5.4}$$

Vezessük be az alábbi

$$v(y) := w(f_y), \qquad y \in \ell^q$$

egyenlőséggel definiált $v : \ell^q \to \mathbb{K}$ függvényt, mely az $\|y\|_q = \|f_y\|$ egyenlőség miatt jóldefiniált folytonos lineáris funkcionál. Az 5.6 Tétel szerint létezik olyan $x \in \ell^p$ sorozat, amely mellett v előáll

$$v(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \qquad y \in \ell^q$$

alakban. Ezzel az (5.4) formulát és egyúttal az ℓ^p sorozattér reflexivitását beláttuk.

Összefoglalva a fentieket a következő eredményt kapjuk:

5.11. Állítás. *Bármely $1 < p < +\infty$ mellett ℓ^p Banach-tér reflexív, míg a c_0, ℓ^1 és ℓ^∞ Banach-terek egyike sem reflexív.*

5.3. L^p terek duálisa

Az alábbiakban legyen $(X, \mathscr{A})$ egy mérhető tér, vagyis X egy nem-üres halmaz és $\mathscr{A}$ az X bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra. Az alábbiakban adott $1 \leq p \leq +\infty$ szám mellett megvizsgáljuk az $L^p(\mu)$ Banach-tér duális terét.

Elsőként rögzítsünk egy $1 < p < +\infty$ számot és jelölje q a p szám konjugáltját, vagyis amelyre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A Hölder-egyenlőtlenség alapján bármely $f \in L^p(\mu)$ és $g \in L^q(\mu)$ mellett fennáll, hogy

$$\left| \int_X f \cdot g \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

amiből következik, hogy rögzített $g \in L^q(\mu)$ mellett a

$$T_g(f) := \int_X f \cdot g \, d\mu, \qquad f \in L^p(\mu) \tag{5.5}$$

egyenlőséggel értelmezett $T_g : L^p(\mu) \to \mathbb{K}$ leképezés jól definiált folytonos lineáris funkcionál, éspedig $\|T_g\| \leq \|g\|_q$. Megmutatjuk, hogy

$$\|T_g\| = \|g\|_q, \qquad g \in L^q(\mu). \tag{5.6}$$

Tekintsük ui. a

$$f := \frac{\bar{g}}{|g|} \cdot \left(\frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^{q/p}$$

függvényt, akkor minden $t \in X$, $g(t) \neq 0$ esetén

$$|f(t)|^p = \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q},$$

amiből kapjuk, hogy

$$\int_X |f|^p \, d\mu = 1,$$

vagyis $f \in L^p(\mu)$ és $\|f\|_p = 1$, emellett $1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{pq} \cdot q = 1$ figyelembevételével

$$T_g f = \frac{1}{\|g\|_q^{q/p}} \int_X |g|^{1+q/p} \, d\mu = \frac{1}{\|g\|_q^{q/p}} \cdot \|g\|_q^q / \|g\|_q,$$

amiből $\|T_g\| \geq \|g\|_q$ és egyúttal az (5.6) egyenlőség is következik.

Hasonlóképp, legyen $p = 1$ és $q = +\infty$, akkor $g \in L^\infty(\mu)$ mellett (5.5) jóldefiniált folytonos lineáris funkcionált definiál, melyre a fentihez hasonlóan

$$\|T_g\| = \|g\|_\infty, \qquad g \in L^\infty(\mu)$$

teljesül.

Tekintsük ezek után rögzített $1 \leq p < \infty$ mellett a

$$Tg := T_g, \qquad g \in L^q(\mu)$$

egyenlőséggel definiált $T : L^q(\mu) \to L^q(\mu)$ operátort, a fentiek szerint T izometrikus, vagyis

$$\|Tg\| = \|g\|_q, \qquad g \in L^q(\mu).$$

Az alábbiakban igazoljuk, hogy adott $1 \leq p < +\infty$ mellett bármely $L^p(\mu)'$-beli Φ folytonos lineáris funkcionál előáll $Tg = \Phi$ alakban, amennyiben μ σ-véges mérték. Egészen pontosan igaz a következő

5.12. Tétel. *Legyen* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *egy* σ*-véges mértéktér és legyen* $1 \leq p < +\infty$*, akkor a* $T : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ *operátor izometrikus izomorfizmus.*

Bizonyítás. Elsőként azt az esetet tárgyaljuk, amikor μ véges mérték, vagyis amikor $\mu(X) < +\infty$. Rögzítsünk egy $\Phi \in (L^p(\mu))'$ folytonos lineáris funkcionált, megmutatjuk, hogy Φ előáll $\Phi = T_g$ alakban alkalmas $g \in L^q(\mu)$ mellett. A μ mérték végessége miatt bármely $A \in \mathscr{A}$ mellett $\chi_A \in L^p(\mu)$, ezért jól definiált a

$$\nu(A) := \Phi(\chi_A), \qquad A \in \mathscr{A}$$

egyenlőséggel definiált $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{K}$ függvény. A Φ funkcionál additivitása alapján nyilvánvaló, hogy ν additív, továbbá Φ folytonossága alapján ν σ-additív: legyen ui. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy páronként diszjunkt mérhető halmazokból álló sorozat és jelölje $B_n := \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$, illetve $B := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, akkor ismét a μ végessége folytán $\chi_A \in L^p(\mu)$ és $\chi_{B_n} \to \chi_B$ az $L^p(\mu)$-beli norma szerint, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\chi_{B_n}) = \Phi(\chi_B) = \nu(B),$$

vagyis ν valóban σ-additív. Emellett ν abszolút folytonos a μ-re nézve, ha ui. $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = 0$, akkor $\|\chi_A\|_p = 0$ és ezért $\Phi(\chi_A) = 0$, vagyis $\nu(A) = 0$. A Radon–Nikodym-tétel szerint létezik egy olyan $g \in L^1(\mu)$ függvény, hogy

$$\nu(A) = \int_A g = \int_X \chi_A \cdot g \, d\mu, \qquad A \in \mathscr{A}.$$

Jelölje $\Psi : L^\infty(\mu) \to \mathbb{K}$,

$$\Psi(f) := \int_X f \cdot g \, d\mu, \qquad f \in L^\infty(\mu),$$

illetve jelölje $\Phi_0 := \Phi|_{L^\infty(\mu)}$, akkor Ψ és Φ_0 mindketten folytonosak, és bármely $A \in \mathscr{A}$ mérhető halmaz esetén fennáll, hogy

$$\Phi_0(\chi_A) = \nu(A) = \Psi(\chi_A),$$

ezért Φ_0 és Ψ megegyeznek a lépcsős függvények halmazán, ami a $\|\cdot\|_\infty$-norma szerint sűrű $L^\infty(\mu)$-ben. Ebből kapjuk, hogy $\Phi_0 = \Psi$, vagyis

$$\Phi(f) = \int_X f \cdot g \, d\mu, \qquad f \in L^\infty(\mu). \tag{5.7}$$

Következő lépésben belátjuk, hogy $g \in L^q(\mu)$. Elsőként legyen $1 < p < +\infty$ és vezessük be az

$$f := \frac{|g|^q}{g}$$

mérhető függvényt ($\frac{0}{0} := 0$ megállapodás mellett), és $n \in \mathbb{N}$ mellett tekintsük az

$$A_n := \{x \in X \mid |g(x)| \leq n\}$$

halmazt, akkor

$$|f|^p = |g|^q \qquad \text{és} \qquad \chi_{A_n} f \cdot g = \chi_{A_n} |g|^q \in L^\infty(\mu),$$

következésképp (5.7) figyelembevételével

$$\begin{aligned}\int_{A_n} |g|^q \, d\mu &= \int_X \chi_{A_n} f \cdot g \, d\mu = \Phi(\chi_{A_n} f) \\ &\leq \|\Phi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \|\Phi\| \cdot \Big(\int_{A_n} |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \\ &= \|\Phi\| \cdot \Big(\int_{A_n} |g|^q \, d\mu \Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

vagyis $\|\chi_{A_n} g\|_q^q \leq \|\Phi\| \|\chi_{A_n} g\|_q^{q/p}$, amit átrendezve

$$\|\chi_{A_n} g\|_q \leq \|\Phi\|$$

adódik. Mivel $\chi_{A_n} |g|^q \to |g|^q$ monoton növőleg pontonként, azért a Beppo–Levi-tétel szerint fennáll, hogy

$$\int_X |g|^q \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{A_n} |g|^q \, d\mu \leq \|\Phi\|,$$

amiből $g \in L^q(\mu)$ már adódik.

Hasonlóképp, ha $p = 1$ és $q = \infty$, akkor tekintsük az

$$A := \{x \in X \mid |g(x)| > \|\Phi\|\}$$

mérhető halmazt, akkor $\mu(A) = 0$. Valóban, tekinstük az

$$f := \frac{|g|}{g} \chi_A \in L^\infty(\mu)$$

függvényt, akkor $\|f\|_1 = \mu(A)$, és ezért $\mu(A) > 0$ esetén

$$\mu(A)\|\Phi\| < \int_X \chi_A \cdot |g| \, d\mu = \int_X f \cdot g \, d\mu = \Phi(f) \leq \|\Phi\| \|f\|_1 = \|\Phi\| \mu(A)$$

hamis egyenlőtlenséget kapnánk. Ez tehát azt jelenti, hogy $|g| \leq \|\Phi\|$ μ-m.m., vagyis $g \in L^\infty(\mu)$. Ezzel megmutattuk, hogy $1 \leq p < \infty$ esetén $g \in L^q(\mu)$, továbbá (5.7) szerint a Φ és $T_g \in (L^p(\mu))'$ folytonos lineáris funkcionálok megegyeznek az $L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ altéren, mely a $\|\cdot\|_p$-norma szerint sűrű $L^p(\mu)$-ben, következésképp $\Phi = T_g$. Ezzel a tételt $\mu(X) < +\infty$ esetben beláttuk.

Végezetül igazoljuk a tételt abban az esetben, amikor $\mu(X) = +\infty$, de μ σ-véges mérték. Először azt vegyük észre, hogy ekkor van olyan $w \in L^1(\mu)$ függvény, amelyre $0 < w < 1$ teljesül az X-en mindenütt. Valóban, legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan páronként diszjunkt mérhető halmazokból álló sorozat, hogy minden n-re $\mu(X_n) < +\infty$ és

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n,$$

és minden n-re legyen

$$w_n := \frac{1}{2^n(1 + \mu(X_n))} \cdot \chi_{X_n},$$

akkor egyszerű számolás mutatja, hogy $w := \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ eleget tesz a feltételeknek. Tekintsük ezután a

$$\widetilde{\mu}(A) := \int_A w \, d\mu, \qquad A \in \mathscr{A}$$

egyenlőséggel értelmezett $\widetilde{\mu} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_+$ függvényt, mely *véges* mérték. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az alábbi

$$W\widetilde{f} := w^{1/p}\widetilde{f}, \qquad \widetilde{f} \in L^p(\widetilde{\mu})$$

hozzárendeléssel értelmezett $W : L^p(\widetilde{\mu}) \to L^p(\mu)$ leképezés lineáris izometria, továbbá W szürjektív, ui. $f \in L^p(\mu)$ esetén a $w > 0$ feltétel miatt $\widetilde{f} := \frac{1}{w^{1/p}}f$ választás mellett $\widetilde{f} \in L^p(\widetilde{\mu})$ és $f = W\widetilde{f}$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy W izometrikus izomorfizmus. Vezessük be ezután a

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{f}) := \Phi(W\widetilde{f}), \qquad \widetilde{f} \in L^p(\widetilde{\mu})$$

egyenlőséggel definiált $\widetilde{\Phi} : L^p(\widetilde{\mu}) \to \mathbb{K}$ nyilvánvalóan folytonos lineáris funkcionált. A bizonyítás első fele alapján létezik olyan $\widetilde{g} \in L^q(\widetilde{\mu})$, amely mellett $\widetilde{\Phi}$ előáll

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{f}) = \int_X \widetilde{f}\, d\widetilde{\mu}, \qquad \widetilde{f} \in L^p(\widetilde{\mu})$$

alakban, akkor $g := w^{1/q}\widetilde{g}$ választással $g \in L^q(\mu)$, emellett bármely $f \in L^p(\mu)$ mellett $\widetilde{f} := W^{-1}f = \frac{1}{w^{1/p}}f$ választással kapjuk, hogy

$$\Phi(f) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{f}) = \int_X \widetilde{f}\, d\widetilde{\mu} = \int_X \widetilde{f}\, d\widetilde{\mu} = \int_X w \cdot \frac{1}{w^{1/p}} f\, d\mu = \int_X w^{1/q} f\, d\mu,$$

vagyis $\Phi = T_g$. ■

5.13. Megjegyzés. A fenti tétel $p = +\infty$ esetben általában nem igaz, $p = 1$ esetben pedig a tér σ-végességére vonatkozó feltétel nem hagyható el. A tétel állítása viszont $1 < p < +\infty$ esetén bármely (tehát nem csupán σ-véges) mértéktér felett is igaz, a bizonyítás viszont ilyenkor némileg bonyolultabb.

5.14. Tétel. *Legyen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ σ-véges mértéktér, akkor bármely $1 < p < +\infty$ mellett az $L^p(\mu)$ Banach-tér reflexív.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $w \in (L^p(\mu))''$ funkcionált, azt kell igazolnunk, hogy w előáll $w = \widehat{f}$ alakban alkalmas $f \in L^p(\mu)$ mellett. Ehhez tekintsük az (5.5) egyenlőségen keresztül definiált $T : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ lineáris operátort, mely izometria, ezért a

$$\Phi(g) := w(Tg), \qquad g \in L^q(\mu)$$

hozzárendelés egy $\Phi : L^q(\mu) \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionált definiál, vagyis $\Phi \in (L^q(\mu))'$. Az 5.12 Tétel szerint létezik olyan $f \in L^p(\mu)$ függvény, amely mellett Φ előáll

$$\Phi(g) = \int_X f \cdot g\, d\mu, \qquad g \in L^q(\mu)$$

alakban, vagyis

$$\Phi(g) = T_g(f) = \widehat{f}(T_g), \qquad g \in L^q(\mu),$$

ami azt jelenti, hogy minden $g \in L^q(\mu)$ függvény mellett $w(Tg) = \widehat{f}(Tg)$. Az 5.12 Tétel szerint T szürjektív, amiből a $w = \widehat{f}$ egyenlőség és egyúttal az $L^p(\mu)$ Banach-tér reflexivitása is következik. ■

5.4. Folytonos függvények terének duálisa

Az alábbiakban legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ valós számok és jelölje $I := [a, b]$. A fejezet célja a $\mathscr{C}(I; \mathbb{R})$ függvénytér duális terének meghatározása: megmutatjuk, hogy minden $\Phi \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R})'$ folytonos lineáris funkcionál kitüntetett módon azonosítható egy korlátos változású függvény által meghatározott Lebesgue–Stieltjes mértékkel. Ehhez először röviden emlékeztetünk a Lebesgue–Stielties integrál fogalmára. Legyen először $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy monoton növő függvény, és jelölje μ_g azt az $[a, b]$ standard félgyűrűjén értelmezett halmazfüggvényt, amelyet $\alpha, \beta \in [a, b], \alpha < \beta$ esetén az alábbi módon értelmezünk:

$$
\begin{aligned}
\mu_g([\alpha, \beta[) &= g(\beta - 0) - g(\alpha - 0),\\
\mu_g(]\alpha, \beta]) &= g(\beta + 0) - g(\alpha + 0),\\
\mu_g([\alpha, \beta]) &= g(\beta + 0) - g(\alpha - 0),\\
\mu_g(]\alpha, \beta[) &= g(\beta - 0) - g(\alpha + 0),
\end{aligned}
$$

ahol $g(t + 0)$ (illetve $g(t - 0)$) a g függvény t-beli jobboldali (illetve baloldali) határértékét jelöli. Vegyük észre, hogy ezek a határértékek léteznek, ui. egy monoton függvénynek csak elsőfajú szakadási pontjai lehetnek. Nem nehéz ellenőrizni, hogy az így definiált μ_g halmazfüggvény σ-additív, vagyis mérték. Ez azt jelenti, hogy μ_g egyértelműen kiterjeszthető $I = [a, b]$ Borel-halmazainak $\mathscr{B}_I$ σ-algebrájára. Az így nyert mértéket a g függvény által meghatározott Lebesgue–Stieltjes mértéknek nevezzük és azt továbbra is a μ_g szimbólummal jelöljük. Legyen ezután $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges korlátos változású függvény, akkor ismeretes, hogy g előáll két monoton függvény különbségeként, ezért a μ_g előjeles mértéket értelmezhetjük a

$$
\mu_g := \mu_{g_1} - \mu_{g_2}
$$

különbségként, ahol $g = g_1 - g_2$ a g monoton függvények különbségeként való előállítása. Igazolható, hogy μ_g nem függ a g_1 és g_2 függvények konkrét megválasztásától.

Legyen $\varphi \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R})$ egy folytonos függvény, akkor φ integrálható μ_g szerint, továbbá az

$$
\int_a^b \varphi \, d\mu_g
$$

integrál megegyezik a φ g-szerinti Riemann–Stieltjes integráljával, vagyis a

$$
\sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})] \tag{5.8}
$$

alakú összegek megfelelő értelemben vett határértékével, ahol $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ az $[a, b]$ egy felosztása és $\xi_k \in [x_k, x_{k-1}]$. Jelölje $V_a^b(g)$ a g teljes változását az $[a, b]$ intervallumon:

$$
V_a^b(g) = \sup \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|,
$$

ahol a supremum az $[a, b]$ összes felosztásai felett veendő. Ekkor bármely (5.8) alakú közelítő összegre fennáll, hogy

$$
\left| \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})] \right| \le |||\varphi||| \cdot V_a^b(g),
$$

amiből az

$$\left|\int_a^b \varphi\, d\mu_g\right| \leq V_a^b(g)\cdot |||\varphi|||, \qquad \varphi \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R})$$

egyenlőséget nyerjük. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a

$$\Phi_g(\varphi) := \int_a^b \varphi\, d\mu_g, \qquad \varphi \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}) \tag{5.9}$$

egyenlőséggel érdelmezett $\Phi_g : \mathscr{C}(I;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ leképezés folytonos lineáris funkcionál, és a normájára fennáll a $\|\Phi_g\| \leq V_a^b(g)$ becslés.

A fejezet hátralévő részének célja, hogy igazoljuk a Riesz-féle reprezentációs tételt, miszerint bármely $\Phi \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R})'$ folytonos funkcionál előáll a fenti (5.9) alakban.

5.15. Tétel. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ valós számok és jelölje $I := [a,b]$. Bármely $\Phi \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R})'$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik olyan $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvény, amely mellett Φ előáll*

$$\Phi(\varphi) := \int_a^b \varphi\, d\mu_g, \qquad \varphi \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R}) \tag{5.10}$$

Lebesgue–Stieltjes integrál alakban, továbbá Φ normájára fennáll a $\|\Phi\| = V_a^b(g)$ egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen Φ egy folytonos lineáris funkcionál $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ fölött. Jelölje $\mathscr{F}^\infty(I;\mathbb{R})$ az I-n értelmezett valós értékű korlátos függvények Banach-terét, akkor ebben $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ olyan lineáris altér, hogy az $\mathscr{F}^\infty(I;\mathbb{R})$ feletti $\|\cdot\|_\infty$ supremum norma $\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$-re vett megszorítása megegyezik a $|||\cdot|||$ normával. A 4.5 Tétel szerint létezik Φ-nek $\widetilde{\Phi} \in (\mathscr{F}^\infty(I;\mathbb{R}))'$ normatartó kiterjesztése. Rögzített $a < t \leq b$ mellett vezessük be a

$$h_t(s) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < s \leq t, \\ 0, & \text{ha } t < s \leq b. \end{cases}$$

egyenlőséggel értelmezett $h_t \in \mathscr{F}^\infty(I;\mathbb{R})$ függvényt (vagyis h_t nem más mint az $[a,t]$ intervallum karakterisztikus függvénye), illetve legyen $h_a := 0$. Vegyük a

$$g(t) := \widetilde{\Phi}(h_t), \qquad t \in [a,b] \tag{5.11}$$

hozzárendeléssel definiált $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt. Megmutatjuk, hogy az így definiált g eleget tesz a tételben előírtaknak.

Elsőként azt igazoljuk, hogy a g korlátos változású: legyen ui. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy véges felosztása és minden $k = 1, 2, \ldots, n$ indexre legyen $\lambda_k = \pm 1$ az a szám, amelyre

$$|g(t_k) - g(t_{k-1})| = \lambda_k \cdot [g(t_k) - g(t_{k-1})],$$

akkor

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot[g(t_k)-g(t_{k-1})]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot[\widetilde{\Phi}(h_{t_k})-\widetilde{\Phi}(h_{t_{k-1}})]\\ &= \widetilde{\Phi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot[h_{t_k}-h_{t_{k-1}}]\Big)\\ &\le \|\widetilde{\Phi}\|\Big\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot[h_{t_k}-h_{t_{k-1}}]\Big\|_\infty.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a kapott becslés jobb oldalán álló függvény mindenütt csupán a $-1,0$ és 1 értékeket veheti fel, vagyis a normája legfeljebb 1, ezért a $\|\Phi\|=\|\widetilde{\Phi}\|$ egyenlőség figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(t_{k-1})|\le\|\Phi\|.$$

Mivel ez a becslés az $[a,b]$ intervallum tetszőleges felbontására igaz, azért ebből már következik, hogy g korlátos változású és egyúttal az is, hogy

$$V_a^b(g)\le\|\Phi\|.$$

Legyen most $\varphi\in\mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ egy rögzített folytonos függvény és legyen $\varepsilon>0$, akkor φ egyenletes folytonossága alapján választható olyan $\delta>0$, hogy $|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon$, amennyiben $s,t\in I, |s-t|<\delta$. Válasszuk az I intervallumnak egy δ-nál finomabb $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ felosztását, továbbá legyen $t_{k-1}\le x_k\le t_k$, és vezessük be a

$$h:=\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\cdot[h_{t_k}-h_{t_{k-1}}]$$

lépcsős függvényt, akkor $a<t\le b$ esetén valamely k-ra $t_{k-1}<t\le t_k$, ezért δ választása alapján

$$|h(t)-\varphi(t)|=|\varphi(x_k)-\varphi(t)|<\varepsilon,$$

illetve $h(a)=\varphi(x_1)$, ezért ismét

$$|h(a)-\varphi(a)|=|\varphi(x_1)-\varphi(a)|<\varepsilon,$$

vagyis $\|h-\varphi\|_\infty<\varepsilon$. Végül (5.11) figyelembevételével

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(h) &= \widetilde{\Phi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\cdot[h_{t_k}-h_{t_{k-1}}]\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\cdot[\widetilde{\Phi}(h_{t_k})-\widetilde{\Phi}(h_{t_{k-1}})]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\cdot[g(t_k)-g(t_{k-1})],\end{aligned}$$

ahol a jobb oldalon álló kifejezés éppen az

$$\int_a^b\varphi\,d\mu_g$$

Riemann–Stieltjes integrál egy közelítő összege, így ha a megfelelő felosztás kellően finom, akkor

$$\left|\int_a^b \varphi\,d\mu_g - \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)\cdot[g(t_k)-g(t_{k-1})]\right| < \varepsilon.$$

Végül a fentiek figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left|\Phi(\varphi) - \int_a^b \varphi\,d\mu_g\right| &\le \left|\widetilde{\Phi}(\varphi)-\widetilde{\Phi}(h)\right| + \left|\widetilde{\Phi}(h) - \int_a^b \varphi\,d\mu_g\right| \\ &\le \|\Phi\|\|\varphi - h\| + \left|\sum_{k=1}^n \varphi(x_k)\cdot[g(t_k)-g(t_{k-1})] - \int_a^b \varphi\,d\mu_g\right| \\ &\le \varepsilon\cdot[1+\|\Phi\|],\end{aligned}$$

amiből a bizonyítandó (5.10) egyenlőség már következik. ∎

A tétel egy egyszerű alkalmazásaként leírjuk az egyszer folytonos differenciálható függvények $\mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$ Banach-terének duális terét. (Emlékeztetünk rá, hogy egy $\varphi \in \mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$ függvény normáját a

$$\|\varphi\| := |||\varphi||| + |||\varphi'||| \tag{5.12}$$

egyenlőséggel definiáltuk.)

5.16. Tétel. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ valós számok és jelölje $\mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$ az I-n értelmezett folytonosan differenciálható függvények* (5.12) *alatti normával ellátott Banach-terét. Ekkor bármely $\Phi \in \mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})'$ folytonos lineáris funkcionál előáll*

$$\Phi(\varphi) = \alpha\varphi(a) + \int_a^b \varphi'\,d\mu_g, \qquad \varphi \in \mathscr{C}^1(I;\mathbb{R}) \tag{5.13}$$

alakban valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ szám és $g : I \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvény mellett.

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{C}_a^1$ azon $\mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$-beli φ függvények halmazát, amelyekre $\varphi(a) = 0$. Mivel $\mathscr{C}_a^1$ megegyezik a

$$\delta_a(\varphi) := \varphi(a), \qquad \varphi \in \mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$$

kiértékelő funkcionál magterével, azért δ_a folytonossága miatt $\mathscr{C}_a^1$ zárt lineáris altér $\mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$-ben. Tekintsük a

$$D\varphi := \varphi', \qquad \varphi \in \mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$$

$D : \mathscr{C}^1(I;\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ deriválás operátor, mely folytonos lineáris leképezés. Legyen továbbá $T : \mathscr{C}(I;\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_a^1$ az a lineáris leképezés, amely egy $\psi \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R})$ függvényhez azt a $T\psi$ függvényt rendeli, amely egy $x \in I$ pontban a

$$(T\psi)(x) := \int_a^x \psi(x)\,dx$$

értéket veszi fel. Könnyen ellenőrizhető, hogy T szintén folytonos lineáris operátor, továbbá bármely $\varphi_0 \in \mathscr{C}_a^1$ funkcionálra fennáll a

$$TD\varphi_0 = \varphi_0$$

egyenlőség. Vezessük be a

$$\Psi(\psi) := \Phi(T\psi), \qquad \psi \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R})$$

egyenlőséggel definiált $\Psi : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely nyilvánvalóan folytonos lineáris funkcionál, ezért az 5.15 Tétel szerint Ψ előáll

$$\Psi(\psi) = \int_a^b \psi \, d\mu_g, \qquad \psi \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R})$$

alakban valamely $g : I \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvényre. Legyen végül $\varphi \in \mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$, akkor φ előáll $\varphi = \varphi(a) \cdot \mathbf{1} + \varphi_0$ alakban, ahol $\varphi_0 = \varphi - \varphi(a) \cdot \mathbf{1} \in \mathscr{C}_0^1$ és $D\varphi = \varphi_0$, ezért

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi) &= \Phi(\mathbf{1})\varphi(a) + \Phi(\varphi_0)\\ &= \Phi(\mathbf{1})\varphi(a) + \Phi(TD\varphi_0)\\ &= \Phi(\mathbf{1})\varphi(a) + \Psi(D\varphi)\\ &= \Phi(\mathbf{1})\varphi(a) + \int_a^b \varphi' \, d\mu_g,\end{aligned}$$

vagyis $\alpha := \Phi(\mathbf{1})$ választással Φ-t az (5.13) alatti kanonikus alakra hoztuk. ∎

6. FEJEZET

Banach-terek alaptételei

6.1. A Baire-féle kategóriatétel

Ebben a fejezetben az operátorelmélet négy alapvető fontosságú tételét tárgyaljuk. Ezek mindegyike Stefan Banach lengyel matematikus nevéhez kötődik: az egyenletes korlátosság tétele, a nyílt leképezés tétel, a lineáris homeomorfizmus tétel, valamint a zárt gráf tétel. E fejezet célja, hogy ezeket a klasszikus eredményeket áttekintsük és néhány érdekes és nemtriviális következményüket bemutassuk.

Valamennyi tétel mélyén az alábbi ún. a Baire-féle kategória tétel rejlik, miszerint teljes metrikus tér megszámlálható sok sűrű nyílt halmazának metszete maga is sűrű.

6.1. Baire-féle kategória tétel. *Legyen (X, d) teljes metrikus tér és legyen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az X csupa sűrű nyílt halmazaiból álló sorozat. Ekkor $\bigcap_{n=0}^{\infty} V_n$ maga is sűrű X-ben.*

Bizonyítás. Legyen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat, hogy minden n természetes számra V_n sűrű nyílt részhalmaza X-nek és jelölje

$$V := \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n.$$

Legyen W egy tetszőleges X-beli nem-üres nyílt halmaz, azt kell megmutatnunk, hogy $V \cap W \neq \emptyset$. A feltétel szerint $V_0 \cap W$ nem-üres nyílt halmaz, ezért létezik olyan $x_0 \in X$ pont és $0 < r_0 < 1$ szám, hogy

$$\bar{B}_{r_0}(x_0) \subseteq V_0 \cap W.$$

Hasonlóan, a V_1 halmazra vonatkozó feltételek alapán a $V_1 \cap B_{r_0}(x_0)$ metszet szintén nem-üres nyílt halmaz X-ben, ezért létezik olyan $x_1 \in X$ és $0 < r_1 < 1/2$ szám, hogy

$$\bar{B}_{r_1}(x_1) \subseteq V_1 \cap B_{r_0}(x_0).$$

Rekurzióval, minden lépésben az előzőekhez hasonlóan a V_n halmazok sűrűségét és nyíltságát kihasználva kapjuk olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X-beli és $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^+$-beli sorozatok létezését, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ mellett

$$r_n \leq \frac{1}{n+1}, \qquad \text{és} \qquad \bar{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{r_n}(x_n) \cap V_{n+1}. \tag{6.1}$$

Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, illetve $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra tett feltevések alapján világos, hogy a $(\bar{B}_{r_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ rendszer az X teljes metrikus tér olyan egymásba skatulyázott zárt részhalmazaiból álló sorozat, amelyre $\operatorname{diam}(\bar{B}_{r_n}(x_n)) \to 0$, ami azt jelenti, hogy e halmazsorozat teljesíti a Cantor-féle közöspont tétel feltételeit, vagyis a $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{r_n}(x_n)$ metszet nem üres, sőt egyetlen

$x \in X$ elemből áll:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{r_n}(x_n) = \{x\}.$$

A (6.1) feltétel alapján világos, hogy $x \in V \cap W$, amivel igazoltuk hogy a V halmaz bármely $W \subseteq X$ nem-üres nyílt halmazzal vett metszete nem-üres, ami azt jelenti, hogy a V halmaz sűrű X-ben. ■

6.2. Definíció. Legyen X metrikus tér és $E \subseteq X$ az X egy tetszőleges részhalmaza.

(a) Az E halmazt *sehol sem sűrűnek* nevezzük, ha $\mathrm{Int}(\overline{E}) = \emptyset$.

(b) Az E halmazt *első kategóriájúnak* nevezzük, ha E előáll az X megszámlálható sok sehol sem sűrű részhalmazának uniójaként.

(c) Az E halmazt *második kategóriájúnak* nevezzük, ha nem első kategóriájú.

A definícióból könnyen látható, hogy egy sehol sem sűrű halmaz bármely részhalmaza is sehol sem sűrű, illetve egy halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha a lezárása sehol sem sűrű. Világos továbbá az is, hogy megszámlálható sok első kategóriájú halmaz uniója is első kategóriájú, illetve egy halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik olyan csupa sehol sem sűrű zárt halmazokból álló megszámlálható rendszer, amely azt lefedi.

A 6.1 Tétel „kategória tétel" elnevezését annak alábbi átfogalmazása indokolja:

6.3. Tétel. *Minden teljes metrikus tér második kategóriájú.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy az X teljes metrikus tér első kategóriájú, akkor létezik az X csupa zárt részhalmazaiból álló $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy X előáll

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

alakban, ahol minden n-re $\mathrm{Int}(F_n) = \emptyset$. Vezessük be minden n esetén a $V_n := F_n^c := X \setminus F_n$ jelölést, akkor világos, hogy V_n nyílt halmaz továbbá a

$$\overline{V_n}^{\,c} = \mathrm{Int}(F_n) = \emptyset$$

összefüggésből látható, hogy V_n sűrű X-ben. Ugyanakkor a de Morgan formula szerint

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n^c = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)^c = \emptyset,$$

ami ellentmond a 6.1 Tételnek. ■

Az alábbi egyszerű példa mutatja, hogy az X metrikus tér teljessége lényeges feltétele a kategória tételnek. Tekintsük ugyanis a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát az abszolút érték metrika $\mathbb{Q}$-ra vett leszűkítésével. Világos, hogy minden $x \in \mathbb{Q}$ mellett az $\{x\}$ halmaz zárt, sehol sem sűrű részhalmaza $\mathbb{Q}$-nak, ugyanakkor a

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$$

egyenlőségből látható, hogy $\mathbb{Q}$ előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként, vagyis $\mathbb{Q}$ első kategóriájú halmaz.

Megjegyezzük azonban azt is, hogy egy nem teljes metrikus tér is lehet második kategóriájú: tekinstük ugyanis $\mathbb{R}$-et az alábbi $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ metrikával, ahol

$$d(x, y) := |\mathrm{arc\,tg}(x) - \mathrm{arc\,tg}(y)|, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Egyszerű számolás igazolja, hogy $(\mathbb{R}, d)$ nem teljes metrikus tér, ugyanakkor az is könnyen ellenőrizhető, hogy d és az abszolút érték metrika ugyanazt az $\mathbb{R}$ feletti topológiát generálják, amiből látható, hogy $\mathbb{R}$ második kategóriájú halmaz az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus térben is.

6.2. Sehol sem differenciálható folytonos függvények létezése

Az alábbiakban a Baire-féle kategória tétel segítségével megmutatjuk folytonos, de sehol sem differenciálható függvény létezését. Pontosabban igazolni fogjuk, hogy az ilyen tulajdonságú függvények topológiai szempontból „nagy”, vagyis második kategóriájú halmazt alkotnak a $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ Banach-térben, míg azok a folytonos függvények, amelyek differenciálhatók az $[a,b]$ intervallum valamely pontjában, topológiailag „kicsi”, vagyis első kategóriájú halmazt alkotnak a $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ Banach-térben. (Ebben a fejezetben a $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ teret mindenütt a $|||\cdot|||$ maximum normával látjuk el.)

6.4. Lemma. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, és legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amely differenciálható az $[a,b]$ intervallum valamely x_0 pontjában ($x_0 = a$ esetén jobbról, $x_0 = b$ esetén balról). Ekkor létezik olyan $C \geq 0$ konstans, hogy minden $[a,b] \ni x$-re*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|. \tag{6.2}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f differenciálható az $x_0 \in]a,b[$ pontban. Ekkor létezik x_0-nak olyan $U \subseteq [a,b]$ nyílt környezete, hogy az

$$U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|$$

függvény korlátos; legyen ennek egy felsőkorlátja C_1. Másfelől az

$$[a,b] \setminus U \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|$$

függvény folytonos az $[a,b] \setminus U$ kompakt halmazon, ezért korlátos a Weierstrass-féle maximum-minimum elv szerint; legyen ennek egy felső korlátja C_2. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $C := \max\{C_1, C_2\}$ választással (6.2) teljesül. Hasonlóan igazolható az állítás az $x_0 = a$ és $x_0 = b$ esetekben is. ■

6.5. Lemma. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett tekintsük a $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ Banach-tér alábbi*

$$E_n := \{f \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{R}) \mid (\exists x_0 \in [a,b])(\forall x \in [a,b]) : |f(x) - f(x_0)| \leq n|x - x_0|\}$$

részhalmazát. Ekkor E_n zárt, sehol sem sűrű részhalmaza $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$-nek.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $n \in \mathbb{N}$ természetes számot. Először megmutatjuk, hogy E_n zárt. Ennek igazolásához legyen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ E_n-ben haladó sorozat és $f \in \mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$, hogy $|||f_k - f||| \to 0$. A kiválasztási axióma alapján található olyan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $[a,b]$-beli sorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in [a,b]$ esetén

$$|f_k(x) - f_k(x_k)| \leq n|x - x_k|.$$

A Bolzano–Weierstrass-tétel szerint létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény és $z \in [a, b]$, hogy $x_{\sigma(k)} \to z$. Ekkor tetszőleges $[a, b] \ni x$-re és $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f_{\sigma(k)}(x)| + |f_{\sigma(k)}(x) - f_{\sigma(k)}(x_k)| + \\ + |f_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)}) - f_{\sigma(k)}(z)| + |f_{\sigma(k)}(z) - f(z)| \\ \leq |||f - f_{\sigma(k)}||| + n|x - x_{\sigma(k)}| + n|x_{\sigma(k)} - z| + |||f_{\sigma(k)} - f|||. \end{aligned}$$

Itt az egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő kifejezés határértéke $k \to \infty$ esetén $n|x - z|$, amiből következik, hogy

$$|f(x) - f(z)| \leq n|x - z|, \qquad x \in [a, b],$$

amiből következik, hogy $f \in E_n$ és egyúttal az is, hogy E_n zárt.

Ezután megmutatjuk, hogy E_n sehol sem sűrű halmaz $\mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$-ben, azaz $\mathrm{Int}(E_n) = \emptyset$. Ehhez elegendő azt igazolnunk, hogy tetszőleges rögzített $f \in E_n$ függvényhez és $\varepsilon > 0$ pozitív számhoz létezik olyan $f_0 \in \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$ függvény, amelyre $|||f_0 - f||| < \varepsilon$ és $f_0 \notin E_n$. Elsőként az f függvény egyenletes folytonossága alapján válasszunk olyan $\delta > 0$ számot, amelyre fennáll, hogy bármely $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$, továbbá válasszunk olyan $t_0, t_1, \ldots, t_m$ véges $[a, b]$-beli rendszert, amelyre

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b, \qquad |t_{k+1} - t_k| < \delta.$$

Vezessük be a $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt úgy, hogy $h(t_k) := f(t_k)$ és h lineáris legyen a $[t_k, t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ intervallumon, vagyis a $d_k := \dfrac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$ jelölés bevezetése mellett

$$h(x) := f(t_k) + d_k \cdot (x - t_k), \qquad x \in [t_k, t_{k+1}].$$

Ekkor $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ és $x \in [t_k, t_{k+1}]$ esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - f(t_k)| + |d_k| \cdot |x - t_k| \\ &\leq |f(x) - f(t_k)| + |f(t_{k+1}) - f(t_k)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

amiből következik, hogy $|||f - h||| < \frac{\varepsilon}{2}$. Világos továbbá, hogy h az $[a, b]$ intervallum minden $t_0, \ldots, t_m$-től különböző x pontjában differenciálható, és fennáll a

$$|h(x)| \leq d := \max_{k=0,\ldots,m-1} |d_k|$$

egyenlőtlenség. Legyen végül g olyan $[a, b]$-n értelmezett valós értékű folytonos függvény, amelyre $|||g||| < \varepsilon$, g szakaszonként differenciálható, és minden olyan x pontban, ahol g differenciálható, $|g'(x)| > d + n$. Az eddigiek figyelembevételével könnyen igazolható, hogy $f_0 := h + g$ olyan folytonos függvény, amelyre $|||f - f_0||| < \varepsilon$, ugyanakkor bármely $[a, b] \ni x_0$-hoz létezik $x \in [a, b]$, hogy $|f(x) - f(x_0)| > n|x - x_0|$, vagyis $f_0 \notin E_n$, amivel megmutattuk, hogy $f \notin \mathrm{Int}(E_n)$. Ebből már következik, hogy $\mathrm{Int}(E_n) = \emptyset$, ami E_n zártságának figyelembevételével azt jenti, hogy E_n sehol sem sűrű. ■

6.6. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és jelölje $\mathscr{D}$ azon $f \in \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$ függvények halmazát, amelyek differenciálhatóak valamely $x_0 \in [a, b]$ pontban ($x_0 = a$ esetén balról, $x_0 = b$ esetén jobbról), akkor $\mathscr{D}$ első kategóriájú, a sehol sem differenciálható folytonos függvények halmaza pedig második kategóriájú halmaz $\mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$-ben.*

Bizonyítás. A 6.4 Lemma alapján, a 6.5 Lemma jelöléseit használva világos, hogy

$$\mathscr{D} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n,$$

ahol a 6.5 Lemma szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re E_n sehol sem sűrű, következésképp $\mathscr{D}$ első kategóriájú részhalmaza $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$-nek. Másfelől, ha $\mathscr{D}'$ jelöli a $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$-beli sehol sem differenciálható függvények halmazát, akkor $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ nyilvánvalóan előáll a

$$\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R}) = \mathscr{D} \cup \mathscr{D}' \tag{6.3}$$

alakban, ahol a Baire-féle kategória tétel szerint a baloldalon álló $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ teljes metrikus tér második kategóriájú, a bizonyítás első fele szerint pedig $\mathscr{D}$ első kategóriájú halmaz. Mivel két első kategóriájú halmaz uniója szintén első kategóriájú, azért a (6.3) egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $\mathscr{D}'$ második kategóriájú. ■

6.3. A Gelfand–Zabreiko-lemma

Az alábbi definícióban bevezetünk néhány olyan fogalmat, amelyeknek a topologikus vektorterek elméletében lesz kiemelten fontos szerepe.

6.7. Definíció. Legyen E normált tér.

(a) Egy $A \subseteq E$ halmazt *kiegyensúlyozottnak* (vagy *szimmetrikusnak*) nevezünk, ha minden $x \in A$ és minden $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$ esetén $\lambda x \in A$.
(b) Egy $A \subseteq E$ halmazt *elnyelőnek* nevezünk, ha minden $x \in E$ esetén létezik olyan $\alpha \geq 0$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \geq \alpha$ esetén $x \in \lambda A$.
(c) Egy $H \subseteq E$ halmazt *hordónak* nevezünk, ha zárt, konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő.

A konvex és kiegyensúlyozott halmazokat szokás *abszolút konvex* halmazoknak is nevezni, ui. egyszerűen ellenőrizhető, hogy egy A halmaz pontosan akkor konvex és kiegyensúlyozott, ha bármely $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ esetén $\lambda A + \mu A \subseteq A$. Ezzel a szóhasználattal egy $H \subseteq E$ halmaz hordó, ha zárt, abszolút konvex és elnyelő.

Könnyen látható, hogy normált térben minden nulla közepű zárt gömb hordó, és emiatt világos, hogy a null-vektor bármely környezete tartalmaz hordót.

6.8. Tétel. *Banach-térben minden hordó a null-vektor egy környezete.*

Bizonyítás. Legyen $H \subseteq E$ hordó, megmutatjuk, hogy H a $0 \in E$ vektor egy környezete, azaz létezik olyan $r > 0$ szám, hogy $B_r(0) \subseteq H$. Könnyen látható, hogy minden n pozitív egész esetén az nH halmaz is hordó, és mivel H elnyelő, azért

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} nH = E.$$

Az E normált tér teljessége miatt és a 6.3 Baire-féle kategória tétel alapján kapjuk, hogy létezik olyan n szám, hogy $\mathrm{Int}(\overline{nH}) \neq \emptyset$, vagyis az nH halmaz zártsága miatt $\mathrm{Int}(nH) \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy található olyan $x_0 \in E$ vektor és $r_0 > 0$ szám, hogy

$$B_{r_0}(x_0) \subseteq nH,$$

ezért minden $x \in E$ vektorra $\|x\| < r_0$ esetén

$$x + x_0 \in nH.$$

Az nH halmaz kiegyensúlyozottsága miatt $-x_0 \in nH$, másrészt az nH halmaz konvexitása alapján

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(-x_0) + \frac{1}{2}(x_0 + x) \in \frac{1}{2}(nH) + \frac{1}{2}(nH) \subseteq nH,$$

vagyis $\frac{1}{2}x \in nH$, amivel megmutattuk, hogy $\frac{1}{2}B_{r_0}(0) \subseteq nH$, vagyis $r := \frac{r_0}{2n}$ választással $B_r(0) \subseteq H$. Ez pedig azt jelenti, hogy a H hordó a 0 egy környezete. ∎

Emlékeztetünk rá, hogy egy E vektortéren értelmezett $p : E \to \mathbb{R}_+$ abszolút homogén és szubadditív függvényt félnormának nevezünk.

6.9. Állítás. *Ha E normált tér, akkor egy $p : E \to \mathbb{R}_+$ félnorma pontosan akkor folytonos, ha létezik olyan $C \geq 0$ szám, hogy minden $x \in E$ vektor esetén $p(x) \leq C\|x\|$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy p olyan félnorma E-n, amelyhez létezik olyan $C \geq 0$ konstans, hogy $p(x) \leq C\|x\|$ minden $x \in E$ mellett. Megmutatjuk, hogy p az E normált tér minden pontjában folytonos. Legyen ugyanis $x \in E$ tetszőleges vektor és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-ben haladó sorozat, amelyre $x_n \to x$, akkor

$$|p(x_n) - p(x)| \leq p(x_n - x) \leq C\|x_n - x\| \to 0.$$

Tehát $p(x_n) \to p(x)$, vagyis p folytonos az x pontban. Megfordítva tegyük fel, hogy p folytonos, speciálisan folytonos a $0 \in E$ pontban. Akkor $p(0) = 0$ miatt az $\varepsilon := 1$ számhoz (is) létezik a olyan $r > 0$ szám, hogy minden $y \in \bar{B}_r(0)$ vektorra $p(y) \leq 1$ teljesül. Ha $x \in E$ tetszőleges nem-nulla vektor, akkor $y = \frac{rx}{\|x\|} \in \bar{B}_r(0)$ miatt

$$1 \geq p(y) = \frac{rp(x)}{\|x\|},$$

amit átrendezve kapjuk, hogy $p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$. Ezzel igazoltuk, hogy $C := \frac{1}{r}$ választással tetszőleges $x \in E$ mellett $p(x) \leq C\|x\|$. ∎

Az alábbi eredmény jóval gyengébb feltételeken keresztül biztosítja egy Banach-téren értelmezett félnorma folytonosságát:

6.10. Gelfand–Zabreiko-lemma. *Legyen E Banach-tér és $p : E \to \mathbb{R}_+$ félnorma, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) *p folytonos, vagyis létezik olyan $C \geq 0$, hogy minden $x \in E$ vektorra $p(x) \leq C\|x\|$.*

(ii) *p alulról félig folytonos, vagyis minden $c \geq 0$ számra a*

$$[p \leq c] := \{x \in E \,|\, p(x) \leq c\}$$

nívóhalmaz zárt E-ben.

(iii) *p σ-szubadditív, vagyis tetszőleges E-ben haladó $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergens sorra*

$$p\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(x_n)$$

teljesül, ahol a jobboldalon álló szumma $\overline{\mathbb{R}}$-ban értendő.

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii) következtetés nyilvánvaló (a tér teljességének felhasználása nélkül is): ha ugyanis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-beli sorozat, hogy $x_n \to x$ valamely $E \ni x$-re és minden $n \in \mathbb{N}$ mellett $p(x_n) \leq c$, akkor (i) szerint $p(x_n) \to p(x)$, ezért $p(x) \leq c$.

A (ii)⇒(iii) irány igazolásához legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan E-ben haladó sorozat, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sor konvergens. Jelölje s_n a sor n-edik részletösszegét, illetve vezessük be az

$$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \qquad c := \sum_{n=0}^{\infty} p(x_n)$$

egyenlőséggel definiált $x \in E$ vektort és $c \in \overline{\mathbb{R}}$ számot. Nyilvánvalóan feltehető, hogy a c szám véges. Mivel bármely n természetes számra a p félnorma (véges) szubadditivitása folytán fennáll, hogy

$$p(s_n) \leq \sum_{j=0}^{n} p(x_j) \leq c,$$

azért $s_n \in [p \leq c]$. Ez utóbbi halmaz zártsága és $s_n \to x$ miatt $p(x) \leq c$ is teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy p σ-szubadditív.

A (iii)⇒(i) implikáció igazolásához tegyük fel, hogy a $p : E \to \mathbb{R}_+$ félnorma σ-szubadditív. Könnyen igazolható, hogy a $H := \overline{[p < 1]}$ halmaz zárt, konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmaza E-nek, vagyis H hordó. A 6.8 Tétel szerint minden hordó a null-vektor egy környezete, ezért létezik olyan $r > 0$ szám, hogy

$$B_r \subseteq \overline{[p < 1]}, \tag{6.4}$$

ahol B_r jelöli az E-beli 0 középpontú r-sugarú zárt gömböt. Megmutatjuk, hogy

$$B_r \subseteq [p \leq 2]. \tag{6.5}$$

Legyen ugyanis $x \in B_r$, ekkor (6.4) alapján létezik $x_0 \in [p < 1]$, hogy $\|x - x_0\| < \frac{r}{2}$, és emiatt

$$x - x_0 \in B_{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2} B_r \subseteq \frac{1}{2} \cdot \overline{[p < 1]} = \overline{\left[p < \tfrac{1}{2}\right]}.$$

Következésképp létezik olyan $x_1 \in [p < \frac{1}{2}]$, hogy $\|x - x_0 - x_1\| < \frac{r}{4}$, és emiatt

$$x - x_0 - x_1 \in \frac{1}{4} B_r \subseteq \frac{1}{4} \cdot \overline{[p < 1]} = \overline{\left[p < \tfrac{1}{4}\right]}.$$

Ezt az eljárást folytatva rekurzióval kapjuk olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ mellett

$$x_n \in [p < \tfrac{1}{2^n}] \qquad \text{és} \qquad \left\| x - \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Nyilvánvaló, hogy az így kapott $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sor konvergens, éspedig $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$, ezért a p félnorma σ-szubadditivitásának felhasználásával nyerjük, hogy

$$p(x) = p\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(x_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $x \in [p \leq 2]$, amivel a (6.5) összefüggést igazoltuk. A bizonyítás innen már könnyen befejezhető: legyen ugyanis $x \in E$ egy tetszőleges nem nulla vektor, akkor $y := \frac{rx}{\|x\|}$ választással $y \in B_r$, ezért (6.5) miatt $y \in [p \leq 2]$, vagyis

$$2 \geq p(y) = \frac{rp(x)}{\|x\|},$$

amiből pedig $p(x) \leq \frac{2}{r}\|x\|$ adódik. Következésképp kapjuk, hogy $C := \frac{2}{r}$ választással (i) teljesül, és ezzel a (iii)⇒(i) implikációt, és vele együtt a lemmát is igazoltuk. ■

6.4. Banach egyenletes korlátosság tétele

A Banach-terek operátorainak első alaptételéhez szükségünk lesz korlátos lineáris operátorok egy családjának pontonkénti, illetve egyenletes korlátosságának fogalmára:

6.11. Definíció. Legyenek E és F normált terek, és legyen $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ $\mathscr{B}(E;F)$-beli operátorok egy tetszőleges nem-üres családja.

(a) Az $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ operátorcsaládot *pontonként korlátosnak* nevezzük, ha minden $x \in E$ mellett az $\{A_i x \mid i \in \mathscr{I}\}$ halmaz korlátos F-ben, vagyis minden $x \in E$ esetén létezik olyan $M(x) \geq 0$ konstans, hogy
$$\|A_i x\| \leq M(x), \qquad (\forall i \in \mathscr{I}).$$

(b) Az $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ operátorcsaládot *egyenletesen korlátosnak* nevezzük, ha az $\{A_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ halmaz korlátos $\mathscr{B}(E;F)$-ben, azaz létezik olyan $M \geq 0$, hogy
$$\|A_i\| \leq M, \qquad (\forall i \in \mathscr{I}).$$

Másképp fogalmazva, az $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ rendszer pontonként korlátos, ha minden $x \in E$ vektorra
$$\sup_{i\in\mathscr{I}} \|A_i x\| < +\infty,$$
és egyeneletesen korlátos, ha
$$\sup_{i\in\mathscr{I}} \|A_i\| < +\infty.$$

6.12. Banach egyenletes korlátosság tétele. *Legyen E Banach-tér és F normált tér, akkor egy $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ $\mathscr{B}(E;F)$ tetszőleges nem-üres operátorcsalád pontosan akkor pontonként korlátos, ha egyenletesen korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ rendszer egyenletesen korlátos és legyen $M \geq 0$ olyan konstans, hogy minden $i \in \mathscr{I}$ indexre $\|A_i\| \leq M$. Ekkor bármely $x \in E$ és $i \in \mathscr{I}$ mellett fennáll, hogy
$$\|A_i x\| \leq M\|x\|,$$
amiből következik, hogy az $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ rendszer pontonként korlátos.

Megfordítva tegyük fel, hogy az $(A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ operátorcsalád pontonként korlátos, illetve vezessük be a
$$p(x) := \sup_{i\in\mathscr{I}} \|A_i x\|, \qquad x \in E \tag{6.6}$$
egyenlőséggel értelmezett $p : E \to \mathbb{R}_+$ függvényt, akkor p nyilvánvalóan félnorma E-n. Megmutatjuk, hogy p alulról félig folytonos: legyen ugyanis $c \geq 0$ egy tetszőleges szám és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $[p \leq c]$-ben haladó sorozat, amelyre $x_n \to x$ valamely $x \in E$ mellett, akkor minden (rögzített) $\mathscr{I} \ni i$-re fennáll, hogy
$$\|A_i x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_i x_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} p(x_n) \leq c,$$

amiből kapjuk, hogy

$$p(x) = \sup_{i \in \mathscr{I}} \|A_i x\| \leq c,$$

vagyis $x \in [p \leq c]$. Ezzel megmutattuk, hogy p alulról félig folytonos, ezért a 6.10 Gelfand–Zabreiko-lemma szerint p folytonos, vagyis létezik olyan $C \geq 0$ állandó, hogy minden $x \in E$ esetén

$$\sup_{i \in \mathscr{I}} \|A_i x\| = p(x) \leq C\|x\|,$$

amiből $\sup_{i \in \mathscr{I}} \|A_i\| \leq C$ következik. Ezzel az $(A_i)_{i \in \mathscr{I}}$ operátorcsalád egyenletes korlátosságát és egyúttal a tételt is igazoltuk. ■

Az egyenletes korlátosság tételnek triviális, de hasznos átfogalmazása a következő:

6.13. Következmény. *Legyen E Banach-tér, F normált tér, és legyen $(A_i)_{i \in \mathscr{I}}$ $\mathscr{B}(E; F)$-beli operátorok egy tetszőleges családja. Ekkor az alábbi két kijelentés közül pontosan az egyik teljesül:*

(a) *Az $(A_i)_{i \in \mathscr{I}}$ operátorcsalád egyenletesen korlátos, vagyis $\sup_{i \in \mathscr{I}} \|A_i\| < \infty$.*

(b) *Létezik olyan $x \in E$, hogy $\sup_{i \in \mathscr{I}} \|A_i x\| = +\infty$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló a a 6.12 Banach egyenletes korlátosság tételéből. ■

6.14. Következmény. *Ha E normált tér, akkor egy $M \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha minden $f \in E'$ folytonos lineáris funkcionál mellett az $f\langle M \rangle \subseteq \mathbb{K}$ számhalmaz korlátos, azaz*

$$\sup_{x \in M} |f(x)| < +\infty \qquad (\forall f \in E'). \tag{6.7}$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy minden $M \subseteq E$ korlátos halmazra (6.7) fennáll, ha ugyanis $f \in E'$ tetszőleges folytonos lineáris funkcionál és $C \geq 0$ olyan szám, hogy minden $x \in M$ mellett $\|x\| \leq C$, akkor

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq C \cdot \|f\|, \qquad x \in M,$$

ami azt jelenti, hogy az $f\langle M \rangle \subseteq \mathbb{K}$ halmaz korlátos.

Megfordítva tegyük fel indirekt módon, hogy (6.7) teljesül, de $M \subseteq E$ nem korlátos, és legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan M-beli sorozat, amelyre $\|x_n\| \to +\infty$. Rögzített n index mellett tekintsük az

$$\widehat{x_n}(f) := f(x_n), \qquad f \in E'$$

egyenlőséggel értelmezett $\widehat{x_n} : E' \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált. A 4.14 Állításban láttuk, hogy $\widehat{x_n}$ folytonos. Másrészt a (ii) feltétel szerint az $(\widehat{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat pontonként korlátos, hiszen bármely $f \in E'$ esetén

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\widehat{x_n}(f)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| < +\infty,$$

ezért az E' duális tér teljességét és Banach egyenletes korlátosság tételét alkalmazva kapjuk, hogy az $(\widehat{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ funkcionálsorozat egyenletesen korlátos, azaz $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\widehat{x_n}\| < +\infty$. Ugyanakkor a 4.14 Állításban azt is láttuk, hogy $\|\widehat{x_n}\| = \|x_n\|$, ahol a hipotézis szerint $\|x_n\| \to +\infty$, ezért $\|\widehat{x_n}\| \to +\infty$, vagyis az indirekt feltevésünk ellentmondásra vezetett. ■

Megjegyezzük, hogy a fenti következményben szereplő (6.7) tulajdonságra szokás úgy is hivatkozni, hogy az M halmaz *gyengén korlátos*. Ennek figyelembevételével a fenti következmény az alábbi ekvivalens alakra fogalmazható át:

6.15. Következmény. *Normált tér egy tetszőleges részhalmaza pontosan akkor korlátos, ha gyengén korlátos.*

6.16. Következmény. *Normált térben minden gyengén konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-beli sorozat gyengén tart az $x \in E$ vektorhoz, akkor bármely $f \in E'$ funkcionál esetén az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat korlátos. Ez azt jelenti, hogy az $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ halmaz gyengén korlátos, ezért az előző Tétel szerint egyúttal normában is korlátos, vagyis az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos. ■

Az egyenletes korlátosság tételének egy további nevezetes következménye az alábbi

6.17. Hellinger–Toeplitz-tétel. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ valós vagy komplex Hilbert-terek, legyenek továbbá $S : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ és $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ olyan lineáris operátorok, hogy*

$$(Sx \,|\, y) = (x \,|\, Ty), \qquad x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}. \tag{6.8}$$

Akkor S és T mindketten folytonosak, és fennáll az $S^* = T$ egyenlőség.

Bizonyítás. Rögzített $y \in \mathcal{H}$ mellett tekintsük az

$$f_y(x) := (Sx \,|\, y), \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel definiált $f_y : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált, akkor (6.8) alapján f_y előáll

$$f_y(x) = (x \,|\, Ty), \qquad x \in \mathcal{H}$$

alakban, következésképp bármely $y \in \mathcal{K}$ mellett f_y folytonos és $\|f_y\| = \|Ty\|$. Másfelől, ha $y \in \mathcal{K}$, $\|y\| \le 1$, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ mellett fennáll az

$$|f_y(x)| \le \|Sx\|$$

becslés. Ez azt jelenti, hogy az $\{f_y \,|\, y \in \mathcal{K}, \|y\| \le 1\}$ funkcionálhalmaz pontonként korlátos, ezért a 6.12 Tétel szerint egyúttal egyenletesen is korlátos, azaz létezik olyan $M \ge 0$ konstans, hogy $\|f_y\| \le M$, $(y \in \mathcal{K}, \|y\| \le 1)$. Az $\|f_y\| = \|Ty\|$ egyenlőség figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\|Ty\| \le M, \qquad y \in \mathcal{K}, \|y\| \le 1,$$

vagyis T folytonos és $\|T\| \le M$. Hasonló érveléssel kapjuk az S operátor folytonosságát, amiből (6.8) figyelembevételével az $S^* = T$ azonosság már nyilvánvaló. ■

6.18. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ olyan lineáris operátor, hogy*

$$(Sx \,|\, y) = (x \,|\, Sy), \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Akkor S korlátos önadjungált operátor.

Vegyük észre, hogy a Hellinger–Toeplitz-tétel lényeges feltétele, hogy S és T mindenütt értelmezett operátorok.

6.5. A Banach–Steinhaus-tétel

6.19. Definíció. Legyenek E és F normált terek, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathscr{B}(E;F)$-ben haladó $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pontonként konvergál* az $A \in \mathscr{B}(E;F)$ operátorhoz, ha minden $x \in E$ esetén $A_n x \to Ax$.

Ebben a fejezetben a következő problémával foglalkozunk: tegyük fel, hogy az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa korlátos operátorokból álló sorozat pontonként konvergens. Milyen feltételek mellett lesz a limesz-operátor is folytonos lineáris operátor? Erre a kérdésre ad egyfajta választ az alábbi

6.20. Banach–Steinhaus-tétel. *Legyen E Banach-tér, F normált tér, továbbá legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{B}(E;F)$-ben haladó operátorsorozat. Ha minden $x \in E$ esetén $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, akkor az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként konvergens és az*

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x, \qquad x \in E \tag{6.9}$$

egyenlőséggel értelmezett $A : E \to F$ limesz-operátor folytonos.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a feltétel szerint az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként korlátos, ezért a 6.12 Banach egyenletes korlátosság tétel szerint $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen is korlátos, vagyis

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty.$$

Jelölje A az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat (6.9) alatti pontonkénti limeszfüggvényét. Nyilvánvaló, hogy A lineáris operátor. Az A folytonosságának igazolásához pedig legyen $x \in E$ tetszőleges, akkor minden n-re $\|A_n x\| \le M\|x\|$, ezért

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le M\|x\|,$$

amiből leolvasható, hogy A folytonos és $\|A\| \le M$. ■

6.21. Tétel. *Legyenek E és F Banach-terek és legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{B}(E;F)$-ben haladó operátorsorozat. Ekkor az alábbi kijelentések egyenértékűek:*

(i) *Minden $x \in E$ mellett az $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.*
(ii) *Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként konvergál valamely $A \in \mathscr{B}(E;F)$ folytonos lineáris operátorhoz.*
(iii) *Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat egyenletesen korlátos, és létezik olyan $E_0 \subseteq E$ sűrű lineáris altér, hogy minden $x_0 \in E_0$ mellett az $(A_n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii) és (ii)⇒(iii) implikációk mindegyike következik a 6.20 Banach–Steinhaus-tételből. A hiányzó (iii)⇒(i) irány igazolásához legyen $M > 0$ olyan pozitív szám, hogy minden n indexre $\|A_n\| \le M$, továbbá legyen $E_0 \subseteq E$ olyan sűrű altér, hogy minden $x_0 \in E_0$ vektorra $(A_n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens. Rögzítsünk egy $x \in E$ vektort, megmutatjuk, hogy $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-tulajdonságú sorozat, vagyis az F Banach-tér teljessége miatt konvergens. Legyen ui. $\varepsilon > 0$ pozitív szám, továbbá az E_0 altér sűrűsége alapján rögzítsünk egy olyan $x_0 \in E_0$ vektort, hogy $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{3M}$. A feltétel szerint az $(A_n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért választható olyan N index, hogy bármely $n, m \ge N$ esetén $\|A_n x_0 - A_m x_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ekkor

$$\begin{aligned}\|A_n x - A_m x\| &\le \|A_n(x - x_0)\| + \|A_n x_0 - A_m x_0\| + \|A_m(x_0 - x)\| \\ &\le 2M\|x - x_0\| + \|A_n x_0 - A_m x_0\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

vagyis $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ valóban Cauchy-tulajdonságú sorozat, következésképp konvergens. Ezzel a (iii)⇒(i) irányt, és egyúttal az állítást is igazoltuk. ■

Végezetül megjegyezzük, hogy a Banach–Steinhaus-tétel feltételei mellett egy pontonként konvergens operátorsorozat nem feltétlenül konvergens az *operátornorma* szerint is. Legyen ui. $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat $\mathcal{H}$-ban. Rögzített n mellett tekintsük az

$$u_n(x) := (x \,|\, e_n), \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $u_n : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionált. A Bessel-egyenlőtlenség szerint minden $x \in \mathcal{H}$ vektor mellett fennáll a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x \,|\, e_n)|^2 \le \|x\|^2$$

egyenlőtlenség, amiből a sorok konvergenciájának elemi feltétele alapján következik, hogy $(x \,|\, e_n) \to 0$, vagyis az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál sorozat pontonként tart a 0 funkcionálhoz. Ugyanakkor minden n-re $\|u_n\| = 1$, így $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergál a nulla funkcionálhoz a funkcionálnorma szerint.

6.6. Banach zárt gráf tétele

Emlékeztetünk arra, hogy egy f függvény gráfján (vagy grafikonján) az alábbi

$$G(f) := \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathrm{dom}(f)\}$$

halmazt értjük.

6.22. Definíció. Legyenek (X, d) és (Y, ϱ) metrikus terek, akkor az $f : X \to Y$ függvényt *zárt leképezésnek* nevezzük, ha $G(f)$ zárt részhalmaza $X \times Y$-nak.

A zárt halmazok sorozatokkal való jellemzése alapján könnyen ellenőrizhető az alábbi

6.23. Állítás. *Legyenek X és Y metrikus terek, akkor egy $f : X \to Y$ függvény pontosan akkor zárt leképezés, ha bármely X-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és $x \in X$, valamint $y \in Y$ pontokra $x_n \to x$ és $f(x_n) \to y$ esetén $f(x) = y$ teljesül.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló abból, hogy metrikus térben a zártság és a sorozatzártság ekvivalens fogalmak. ■

Ebből világos, hogy egy $f : X \to Y$ (az X-en mindenütt értelmezett) leképezés zártsága gyengébb tulajdonság a folytonosságnál: tekintsük ui. az alábbi három kijelentést

(a) $x_n \to x$,
(b) $f(x_n) \to y$,
(c) $f(x) = y$.

Míg az f függvény folytonossága azt jelenti, hogy minden x-re (a)⇒(b)∧(c), addig az f zártsága az (a)∧(b)⇒(c) implikációval ekvivalens.

Megjegyezzük azonban azt is, hogy ha f értelmezési tartománya nem zárt részhalmaza X-nek, akkor a folytonosság és a zártság között semmilyen logikai kapcsolat nincsen. Tekintsük ui. az $X = Y = \mathbb{R}$ metrikus tereket és abban az

$$f(x) := 0, \qquad x \in]0,1[,$$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

egyenlőséggel értelmezett $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy f folytonos, de $G(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nem zárt halmaz, illetve $G(g) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ugyan zárt halmaz, de g nem folytonos.

6.24. A Banach-féle zárt gráf tétel. *Legyenek E és F Banach terek, továbbá legyen $T : E \to F$ egy zárt lineáris operátor. Ekkor T folytonos, vagyis $T \in \mathscr{B}(E; F)$.*

Bizonyítás. Vezessük be az alábbi

$$p(x) := \|Tx\|, \qquad x \in E$$

egyenlőséggel értelmezett $p : E \to \mathbb{R}_+$ félnormát. Megmutatjuk, hogy p σ-szubadditív, vagyis p eleget tesz a 6.10 Gelfand–Zabreiko-lemma (iii) feltételének. Legyen ui. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan E-beli sorozat, amelyre a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ vektorsor konvergens. Megmutatjuk, hogy

$$p\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(x_n). \tag{6.10}$$

Feltehető, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p(x_n)$ numerikus sor konvergens (ellenkező esetben a bizonyítandó egyenlőtlenség triviálisan igaz), vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Tx_n\| < +\infty,$$

amiből az F Banach-tér teljessége alapján következik, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} Tx_n$ vektorsor konvergens. Vezessük be az

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \qquad y := \sum_{n=0}^{\infty} Tx_n,$$

jelöléseket, akkor világos, hogy $s_n \to x$ és $Ts_n \to y$, azért a T operátor zártságának figyelembevételével kapjuk, hogy $Tx = y$, amiből

$$p(x) = \|Tx\| = \|y\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} Tx_k \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|Tx_k\|,$$

vagyis (6.10) következik. Ezzel megmutattuk, hogy p σ-szubadditív, így a 6.10 Gelfand–Zabreiko-lemma szerint a p félnorma folytonos, tehát létezik olyan $C \geq 0$ konstans, hogy minden $x \in E$ esetén

$$p(x) \leq C\|x\|,$$

azaz $\|Tx\| \leq C\|x\|$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a T operátor folytonos. ■

Vigyázzunk arra, hogy a zárt gráf tétel csak olyan T operátorra érvényes, amely az E Banach-téren mindenütt értelmezett. Létezhetnek ui. az E-n nem mindenütt definiált zárt lineáris operátorok is, amelyek nem folytonosak. A nemkorlátos zárt operátorokkal részletesen foglalkozunk a jegyzet utolsó fejezetében.

6.7. A lineáris homeomorfizmus tétel

A zárt gráf tétel egy rendkívül fontos alkalmazásaképp igazoljuk a spektrálelmélet egyik legfontosabb alaptételét, az ún. lineáris homeomorfizmus tételt:

6.25. Banach lineáris homeomorfizmus tétele. *Legyenek E és F Banach-terek, legyen továbbá $T \in \mathscr{B}(E;F)$ egy folytonos lineáris bijekció. Ekkor T^{-1} folytonos, vagyis $T : E \to F$ lineáris homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy T^{-1} zárt lineáris operátor az F és E Banach terek között. Valóban, a T folytonosságára vonatkozó feltétel miatt T zárt operátor, másrészt az alábbi

$$G(T) \to G(T^{-1}); \qquad (x, Tx) \mapsto (Tx, x)$$

leképezés izometrikus izomorfizmust létesít a T és T^{-1} operátorok gráfjai között, ezért $G(T^{-1})$ szintén zárt részhalmaza az $F \times E$ szorzattérnek, ami azt jelenti, hogy T^{-1} valóban zárt operátor. Mivel a T operátor szürjektivitása miatt T^{-1} mindenütt definiált F-en, azért a zárt gráf tétel értelmében T^{-1} folytonos operátor az F és E Banach-terek közt. ■

Megjegyezzük, hogy a tételben lényeges az E és F terek teljességére vonatkozó feltétel. Jelölje ui. a rövidség kedvéért E a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós vagy komplex értékű folytonos függvények terét, és tekintsük azon az

$$\|f\| := \max_{x \in I} |f(x)|, \qquad \text{és} \qquad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

egyenlőséggel értelmezett normákat, akkor a $T : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|_1)$, $Tf = f$ identikus operátor folytonos lineáris bijekció. Azonban egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az

$$f_n(x) := x^n, \qquad x \in [0,1], n \in \mathbb{N},$$

hozzárendeléssel értelmezett $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat olyan, hogy $\|f_n\|_1 \to 0$, azonban minden n-re $\|f_n\| = 1$, amiből következik, hogy T^{-1} nem folytonos.

Végezetül megjegyezzük, hogy a lineáris homeomorfizmus tétel segítségével rövid bizonyítás adható a zárt gráf tételre. Vegyük észre ui., hogy ha $T : E \to F$ zárt lineáris operátor az E és F Banach-terek között, akkor $G(T)$ zárt lineáris altere az $E \times F$ Banach-térnek, ahol az $E \times F$ szorzatteret az

$$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|, \qquad x \in E, y \in F$$

normával láttuk el. Ez azt jelenti, hogy $G(T)$ maga is Banach-tér az alábbi

$$\|(x,Tx)\|_{G(T)} := \|x\| + \|Tx\|, \qquad x \in E$$

ún. gráf-normával. Tekintsük az

$$U(x,Tx) := x, \qquad V(x,Tx) := Tx, \qquad x \in E.$$

egyenlőséggel definiált $U : G(T) \to E$, illetve $V : G(T) \to F$ lineáris operátorokat. Könnyen látható, hogy mind U, mind pedig V legfeljebb egy normájú folytonos lineáris operátorok. Másrészt U nyilvánvalóan bijekció a $G(T)$ és E Banach terek között, így a lineáris homeomorfizmus tétel értelmében az $U^{-1} : E \to G(T)$ inverz operátor maga is folytonos. Továbbá minden $x \in E$ mellett

$$U^{-1}x = (x, Tx) \in G(T)$$

teljesül, így fennáll a $T = VU^{-1}$ azonosság. Tehát a T operátort előállítottuk két folytonos operátor kompozíciójaként, így T maga is folytonos.

6.8. A nyílt leképezés tétel

A fejezet fő eredménye előtt emlékeztetünk a nyílt leképezés fogalmára.

6.26. Definíció. Legyenek $(T, \mathscr{T})$, illetve $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek. Egy $f : T \to T'$ függvényt *nyílt leképezésnek* nevezünk, ha T minden $\mathscr{T}$-nyílt részhalmazának f általi képe $\mathscr{T}'$-nyílt halmaz.

Világos, hogy minden homeomorfizmus nyílt leképezés, illetve nyílt leképezések kompozíciója szintén nyílt leképezés.

6.27. A Banach-féle nyílt leképezés tétel. *Legyen E és F Banach-tér, és legyen $A \in \mathscr{B}(E; F)$ szürjektív operátor. Ekkor A nyílt leképezés.*

Bizonyítás. Tekintsük az $E/\ker A$ faktor teret a szokásos faktornormával:

$$\|x + \ker A\| := \inf_{z \in \ker A} \|x + z\|, \qquad x \in E.$$

Ekkor $E/\ker A$ Banach-tér, továbbá az 1.44 Állítás szerint az alábbi

$$A_0(x + \ker A) := Ax, \qquad x \in E$$

kanonikus faktorizált operátor folytonos lineáris bijekció. A Banach lineáris homeomorfizmus tétel értelmében A_0 lineáris A_0 homeomorfizmus. Az 1.42 Állítás szerint a $j(x) := x + \ker A$ $(x \in E)$ hozzárendeléssel értelmezett $j : E \to E/\ker A$ kanonikus faktor leképezés nyílt leképezés, emellett nyilvánvalóan fennáll az $A = A_0 \circ j$ azonosság. Ezzel megmutattuk, hogy A előáll két nyílt leképezés kompozíciójaként, így maga is nyílt leképezés. ■

Megemlítjük, hogy Banach lineáris homeomorfizmus tétele egyszerűen következik a nyílt leképezés tételből, hiszen egy folytonos bijekció pontosan akkor homeomorfizmus, ha nyílt leképezés.

6.9. Douglas faktorizációs tétele

A zárt gráf tétel egy szép és hasznos alkalmazását mutatja be a következő Ronald G. Douglastól származó eredmény:

6.28. Douglas faktorizációs tétele. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

(i) *A és B képtereire fennáll, hogy*

$$\operatorname{ran} A \subseteq \operatorname{ran} B,$$

(ii) *létezik olyan $\lambda \geq 0$, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra*

$$\|A^* x\| \leq \lambda \cdot \|B^* x\|,$$

(iii) *bármely $y \in \mathcal{H}$ vektorhoz létezik olyan $\lambda_y \geq 0$ szám, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ mellett*

$$|(x \,|\, Ay)| \leq \lambda_y \cdot \|B^* x\|,$$

(iv) *létezik olyan $D \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor, hogy*

$$A = BD.$$

Bizonyítás. A bizonyításban az (i)⇒(iii), illetve (iv)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i) implikációkat fogjuk igazolni.

(i)⇒(iii): Legyen $y \in \mathcal{H}$ egy rögzített vektor, akkor (i) alapján létezik olyan $z \in \mathcal{H}$, hogy $Ay = Bz$, ezért minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra

$$|(x \,|\, Ay)| = |(x \,|\, Bz)| = |(B^* x \,|\, z)| \leq \|z\| \cdot \|B^* x\|,$$

vagyis $\lambda := \|z\|$ mellett (iii) fennáll. Hasonlóan egyszerűek a (iv)⇒(ii), (ii)⇒(iii), és (iv)⇒(i) implikációk.

(iii)⇒(iv): Rögzített $y \in \mathcal{H}$ vektor mellett tekintsük a

$$\varphi(B^* x) := (x \,|\, Ay), \qquad x \in \mathcal{H} \tag{6.11}$$

egyenlőséggel értelmezett $\varphi : \operatorname{ran} B^* \to \mathbb{K}$ függvényt, mely (iii) alapján folytonos lineáris funkcionál, éspedig $\|\varphi\| \leq \lambda_y$ normával. A 1.28 Következmény szerint φ egyértelműen kiterjed $\overline{\operatorname{ran} B^*}$ zárt altérre $\widetilde{\varphi}$ folytonos lineáris funkcionállá, ezért a 3.50 Riesz reprezentációs tétel szerint egyértelműen létezik olyan $z = D(y) \in \overline{\operatorname{ran} B^*}$ reprezentáns vektor, amely mellett $\widetilde{\varphi}$ előáll

$$\widetilde{\varphi}(v) = (v \,|\, D(y)), \qquad v \in \overline{\operatorname{ran} B^*}$$

alakban. Speciálisan $v = B^* x$ választással (6.11) alapján

$$(x \,|\, Ay) = (B^* x \,|\, D(y)), \qquad x, y \in \mathcal{H}. \tag{6.12}$$

A $D(y) \in \overline{\operatorname{ran} B^*}, (y \in \mathcal{H})$ összefüggés felhasználásával könnyen igazolható, hogy az így definiált $D : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ leképezés lineáris operátor. Megmutatjuk, hogy D folytonos, amihez a 6.24 Zárt gráf tétel értelmében elegendő D zártságát igazolni. Legyen tehát $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathcal{H}$-ban haladó sorozat, amelyre

$$y_n \to y, \qquad \text{és} \qquad Dy_n \to z,$$

megmutatjuk, hogy $Dy = z$. Egyfelől (6.12) alapján

$$(B^* x \,|\, Dy) = (x \,|\, Ay), \qquad x \in \mathcal{H}$$

másfelől minden n-re

$$(B^* x \,|\, Dy_n) = (x \,|\, Ay_n), \qquad x \in \mathcal{H},$$

ahol $(B^* x \,|\, Dy_n) \to (B^* x \,|\, z)$ és $(x \,|\, Ay_n) \to (x \,|\, Ay)$, amiből kapjuk, hogy

$$(B^* x \,|\, Dy) = (B^* x \,|\, z), \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Mivel Dy és z mindketten $\overline{\operatorname{ran} B^*}$-beli vektorok, azért ebből a $Dy = z$ egyenlőség, és egyúttal D zártsága is következik. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $D \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan folytonos lineáris operátor, amelyre (6.12) alapján fennáll, hogy

$$(x \,|\, BDy) = (x \,|\, Ay), \qquad x, y \in \mathcal{H},$$

következésképp $A = BD$. Ezzel a (iv) állítást és vele együtt a tételt is beláttuk. ■

6.29. Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy a 6.28 Tétel (i)-(iv) ekvivalens feltételei mellett egyetlen olyan $D \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátor létezik, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(a) $\|D\| = \inf\{\lambda \geq 0 \,|\, AA^* \leq \lambda^2 BB^*\}$
(b) $\operatorname{ran} D \subseteq [\ker B]^\perp$.

Ezt a D operátort szokás a

$$BX = A$$

X ismeretlennel felírt operátoregyenlet *Douglas-megoldásának* is nevezni.

7. FEJEZET

Folytonos lineáris operátor spektruma

7.1. Invertálható operátorok

7.1. Definíció. Legyen E normált tér, akkor az $A : E \to E$ operátort invertálhatónak nevezzük, ha A lineáris homeomorfizmus, vagyis A bijektív és $A^{-1} \in \mathscr{B}(E)$. Az invertálható elemek halmazát $G(\mathscr{B}(E))$-vel jelöljük.

Definíció szerint tehát egy $A \in \mathscr{B}(E)$ folytonos lineáris operátor pontosan akkor invertálható, ha A eleget tesz az alábbi három követelménynek:

(I) A injektív, vagyis $\ker A = \{0\}$,
(II) A szürjektív, vagyis $\operatorname{ran} A = E$,
(III) A^{-1} folytonos.

A Banach-féle lineáris homeomorfizmus tétel szerint, ha E Banach-tér, akkor az (I) és (II) feltételekből automatikusan következik (III), vagyis fennáll a következő

7.2. Tétel. *Ha E Banach-tér, akkor*

$$G(\mathscr{B}(E)) = \{A \in \mathscr{B}(E) \mid \ker A = \{0\}, \operatorname{ran} A = E\}.$$

Az alábbi tételben egy jól használható metrikus feltételt adunk egy $A \in \mathscr{B}(E)$ operátor invertálhatóságára:

7.3. Tétel. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$ egy folytonos lineáris operátor, akkor az alábbi két kijelentés ekvivalens:*

(i) *A invertálható, azaz $A \in G(\mathscr{B}(E))$,*
(ii) *$\operatorname{ran} A$ mindenütt sűrű E-ben és létezik olyan $C > 0$ konstans, hogy*

$$\|Ax\| \geq C\|x\|, \qquad x \in E. \tag{7.1}$$

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Tegyük fel, hogy $A \in G(\mathscr{B}(E))$. Ekkor egyrészt A szürjektív, vagyis A képtere triviális módon sűrű E-ben. Másrészt $A^{-1} \in \mathscr{B}(E)$, ezért minden $x \in E$ vektorra fennáll, hogy

$$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\|,$$

tehát $C = \|A^{-1}\|^{-1}$ választással A eleget tesz a (7.1) egyenlőtlenségnek.

(ii)⇒(i): Először megmutatjuk, hogy A képtere zárt: Legyen ui. $y \in \overline{\operatorname{ran} A}$ egy tetszőleges vektor és válasszunk egy olyan E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy $Ax_n \to y$. Akkor (7.1) szerint bármely n, m index mellett fennáll a

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|Ax_n - Ax_m\|$$

becslés, amiből leolvasható, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-tulajdonságú sorozat E-ben. Az E Banach-tér teljessége miatt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens E-ben, vagyis $x_n \to x$ valamely $x \in E$

vektorra. Az A folytonossága miatt $Ax_n \to Ax$, amiből kapjuk, hogy $y = Ax$, vagyis $y \in \operatorname{ran} A$. Ezzel megmutattuk, hogy $\operatorname{ran} A$ zárt. A (ii) feltétel értelmében A képtere mindenütt sűrű, ezért A szürjektív. A (7.1) tulajdonság értelmében A nyilvánvalóan injektív, vagyis A bijektív. Ezen a ponton hivatkozhatnánk a Banach-féle lineáris homeomorfizmus tételre, azonban a bizonyítás e mély eredmény nélkül is könnyedén befejezhető: Legyen ui. $y \in E$ egy tetszőleges vektor, akkor $x = A^{-1}y$ jelölés mellett a (7.1) becslésből következik, hogy

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{C}\|Ax\| = \frac{1}{C}\|y\|,$$

ami éppen azt jelenti, hogy A^{-1} korlátos, és $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$. ■

7.4. Lemma. *Legyen E Banach-tér, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan X-beli sorozat, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ sor konvergens. Ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ vektorsor is konvergens, továbbá*

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \Big\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|.$$

Bizonyítás. Az E Banach-tér teljessége miatt elegendő megmutatni, hogy az

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$$

egyenlőséggel definiált $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részletösszeg sorozat Cauchy-sorozat. Jelölje

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|,$$

akkor a feltétel alapján $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, továbbá $n < m$ indexek mellett fennáll az

$$\|s_m - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| = S_m - S_n$$

becslés, amiből leolvasható, hogy $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. Végezetül jelölje $x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ és $S := \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$, akkor $s_n \to x$ és $S_n \to S$, ahol minden n-re $\|s_n\| \leq S_n$, ezért $\|x\| \leq S$. ■

Az alábbiakban szükségünk lesz egy $A \in \mathscr{B}(E)$ operátor n-edik hatványaira, melyeket az

$$A^0 := I, \qquad A^{n+1} := A \cdot A^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

rekurzióval értelmezünk.

7.5. Carl Neumann-tétel. *Legyen E Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(E)$, $\|A\| < 1$, akkor $I - A$ invertálható, a $\sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$ sor az operátornormában konvergens és*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Bizonyítás. Mivel minden n-re $\|A^n\| \le \|A\|^n$, ahol $\|A\| < 1$, azért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A\|^n$ mértani sor konvergenciájának és $\mathscr{B}(E)$ teljességének figyelembevételével a 7.4 Lemma alapján kapjuk, hogy $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A^n$ konvergens. Jelölje B a megfelelő operátorsor összegét, illetve rögzített n-re B_n az n-edik részletösszeget:

$$B := \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \qquad B_n := \sum_{k=0}^{n} A^k.$$

Ekkor egyfelől $B_n(I-A) \to B(I-A)$, illetve $(I-A)B_n \to (I-A)B$, továbbá $\|A^n\| \to 0$ miatt

$$B_n(I-A) = (I-A)B_n = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I - A^{n+1} \to I,$$

amiből kapjuk, hogy $B(I-A) = (I-A)B = I$. Ezzel tehát igazoltuk hogy $I-A$ invertálható és $(I-A)^{-1} = B$. ■

7.6. Következmény. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$, $\|A\| < 1$, akkor*

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|}. \tag{7.2}$$

Bizonyítás. A 7.5 Tétel szerint $(I-A)^{-1}$ előáll

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

alakban, ezért a 7.4 Lemmabeli norma-becslés alapján

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|},$$

amivel a (7.2) becslést igazoltuk. ■

A fenti következmény egy egyszerű átfogalmazása az alábbi

7.7. Következmény. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E), \|I-A\| < 1$, akkor A invertálható, és*

$$\|A^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|I-A\|}.$$

7.8. Lemma. *Legyen E Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(E)$ invertálható operátor, akkor bármely $B \in \mathscr{B}(E)$ korlátos operátorra $\|A-B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ esetén B is invertálható, emellett fennáll az alábbi becslés:*

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|^2}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|}\|A-B\|. \tag{7.3}$$

Bizonyítás. Az A operátorra vonatkozó invertálhatósági feltétel szerint érvényes az alábbi algebrai átalakítás:

$$B = A - (A-B) = [I - (A-B)A^{-1}]A.$$

Emiatt B invertálhatóságának igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy $I-(A-B)A^{-1}$ is invertálható. Ez viszont következik a 7.5 Tételből, ui.

$$\|(A-B)A^{-1}\| \le \|A-B\|\|A^{-1}\| < 1.$$

A (7.3) becslés igazolásához vegyük észre, hogy

$$B^{-1}-A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1},$$

aminek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\|B^{-1}-A^{-1}\| \le \|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\|. \tag{7.4}$$

Vezessük be a $C := (A-B)A^{-1}$ jelölést, akkor a (7.2) becslés szerint $\|(I-C)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|C\|}$. Másrészt a fentiek alapján B^{-1} előáll $B^{-1} = A^{-1}(I-C)^{-1}$ alakban, amiből

$$\|B^{-1}\| \le \|A^{-1}\|\|(I-C)^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|C\|} \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|},$$

ami a (7.4) egyenlőséggel együtt éppen a bizonyítandó (7.3) becslést adja. ■

A fenti lemma elvi jelentőségű következménye az alábbi

7.9. Tétel. *Ha E Banach-tér, akkor az invertálható operátorok $G(\mathscr{B}(E))$ halmaza nyílt $\mathscr{B}(E)$-ben, továbbá az*

$$\mathrm{inv} : G(\mathscr{B}(E)) \to G(\mathscr{B}(E)); \qquad A \mapsto A^{-1}$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. A $G(\mathscr{B}(E))$ halmaz nyíltsága következik a 7.8 Lemmából, ugyanis annak állítása szerint tetszőleges $A \in G(\mathscr{B}(E))$ invertálható operátor esetén a $G(\mathscr{B}(E))$ halmaz A-val együtt annak $r = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ sugarú környezetét is tartalmazza.

Az inv függvény folytonosságához legyen $A \in G(\mathscr{B}(E))$ és legyen $T \in G(\mathscr{B}(E))$ olyan, hogy $\|A-T\| < \dfrac{1}{2\|A^{-1}\|}$, akkor az (7.3) becslést használva

$$\|T^{-1}-A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|^2}{1-\|A^{-1}\|\|A-T\|}\|A-T\| \le 2\|A^{-1}\|^2\|A-T\|,$$

amiből már látható az inv függvény A-beli folytonossága (sőt, a kapott becslés alapján az inv függvény az A operátor $r = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$ sugarú környezetében rendelkezik a Lipschitz-tulajdonsággal). ■

7.2. A spektrum és a rezolvens függvény

7.10. Definíció. Legyen E normált tér és $A \in \mathscr{B}(E)$ egy folytonos lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy a $\lambda \in \mathbb{K}$ az A *reguláris értéke* (vagy *rezolvens pontja*), ha $A-\lambda I$ invertálható, azaz $A-\lambda I \in G(\mathscr{B}(E))$. A reguláris értékek halmazát $\varrho(A)$ jelöli, vagyis

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid A-\lambda I \in G(\mathscr{B}(E))\}.$$

Az alábbi

$$R_A(\lambda) := (A-\lambda I)^{-1}, \qquad \lambda \in \varrho(A)$$

egyenlőséggel értelmezett $R_A : \varrho(A) \to \mathscr{B}(E)$ függvényt az A *rezolvens függvényének* nevezzük.

Világos, hogy ha λ és μ mindketten az A operátor reguláris értékei, akkor

$$R_A(\lambda)R_A(\mu) = R_A(\mu)R_A(\lambda),$$

ui. egymással felcserélhető invertálható operátorok inverzei is felcserélhetők.

A későbbi számolások során gyakran felhasználjuk majd az alábbi ún. rezolvens azonosságot:

7.11. Állítás. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$, akkor tetszőleges $\lambda, \mu \in \varrho(A)$ esetén*

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu). \tag{7.5}$$

Bizonyítás. Vezessük be az $S := A - \lambda I$ és $T := A - \mu I$ jelöléseket, akkor

$$S^{-1} - T^{-1} = S^{-1}(T - S)T^{-1} = (\lambda - \mu)S^{-1}T^{-1},$$

ami éppen a kívánt azonosság. ■

7.12. Állítás. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$.*

(a) *$\varrho(A) \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz.*
(b) *Ha $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > \|A\|$, akkor $\lambda \in \varrho(A)$.*
(c) *Az $R_A : \varrho(A) \to \mathscr{B}(E)$ rezolvens függvény folytonos*

Bizonyítás. (a) Legyen $\lambda \in \varrho(A)$ és jelölje $r := \|(A - \lambda I)^{-1}\|^{-1}$, akkor tetszőleges $\mu \in \mathbb{K}$ számra $|\lambda - \mu| < r$ esetén $\|(A - \lambda I) - (A - \mu I)\| < r$ teljesül, így a 7.8 Lemma szerint $A - \mu I \in G(\mathscr{B}(E))$, következésképp, $\mu \in \varrho(A)$.

(b) A feltétel szerint $B := \lambda^{-1}A$ olyan operátor, amelyre $\|B\| < 1$, ezért a Carl Neumann tétel szerint $I - B$ invertálható, így az $A - \lambda I = -\lambda(I - B)$ operátor is invertálható, vagyis $\lambda \in \varrho(A)$.

(c) Világos, hogy az $f(\lambda) := A - \lambda I, f : \mathbb{K} \to \mathscr{B}(E)$ leképezés folytonos, továbbá R_A megegyezik az $\mathrm{inv} \circ f$ kompozíció függvénnyel, ahol inv a 7.9 Tétel szerint szintén folytonos függvény. Következésképp R_A maga is folytonos. ■

7.13. Definíció. Legyen E normált tér és $A \in \mathscr{B}(E)$ egy folytonos lineáris operátor, ekkor a $\mathrm{Sp}(A) := \mathbb{K} \setminus \varrho(A)$ halmazt az A operátor *spektrumának* nevezzük, tehát

$$\mathrm{Sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, A - \lambda I \notin G(\mathscr{B}(E))\}.$$

7.14. Állítás. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$, illetve $\lambda \in \mathbb{K}$. Ha $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, akkor az alábbi három feltétel közül pontosan egy teljesül:*

(a) *$A - \lambda I$ nem injektív,*
(b) *$A - \lambda I$ injektív, sűrű képterű, de $A - \lambda I$ nem szürjektív,*
(c) *$A - \lambda I$ injektív és $\overline{\mathrm{ran}(A - \lambda I)} \neq E$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló a Banach-féle lineáris homeomorfizmus tételből. ■

A fenti állítás alapján a spektrum az alábbi három diszjunkt részre osztható:

7.15. Definíció. Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$, illetve $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

(a) A λ számot az A *sajátértékének* nevezzük, ha az $A - \lambda I$ operátor nem injektív. A sajátértékek halmazát az A *pontspektrumának* nevezzük és azt a $\mathrm{Sp}_p(A)$ szimbólummal jelöljük. Továbbá minden olyan $x \in E$, $x \neq 0$ vektort, amelyre $(A - \lambda I)x = 0$ az A operátor λ-hoz tartozó *sajátvektorának* nevezünk.

(b) A λ számot az A *folytonos spektrumpontjának* nevezzük, ha $A - \lambda I$ injektív, sűrű képterű, de nem szürjektív operátor. A folytonos spektrumpontok halmazát az A *folytonos spektrumának* nevezzük és a $\mathrm{Sp}_c(A)$ szimbólummal jelöljük.

(c) A λ számot az A *reziduális spektrumpontjának* nevezzük, ha $A - \lambda I$ injektív, de nem sűrű képterű operátor. A sajátértékek halmazát az A *reziduális spektrumának* nevezzük és azt a $\mathrm{Sp}_r(A)$ szimbólummal jelöljük.

7.16. Megjegyzés. Ha E véges dimenziós Banach-tér, akkor egy $A \in \mathscr{B}(E)$ operátor pontosan akkor injektív, ha bijektív, amiből következik, hogy $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}_p(A)$, és ezért $\mathrm{Sp}_c(A) = \mathrm{Sp}_r(A) = \emptyset$. Ha azonban E végtelen dimenziós Banach-tér, akkor ez általában nem igaz: Tekintsük ui. a négyzetesen szummálható sorozatok ℓ^2 terét és azon az

$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) := (0, x_0, x_1, x_2, \ldots), \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

ún. *shift* operátort. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy S izometria, és ezért $\ker S = \{0\}$, és az is világos, hogy $\operatorname{ran} S$ valódi zárt lineáris altér ℓ^2-ben, következésképp $0 \in \mathrm{Sp}_r(S)$. Könnyen ellenőrizhető továbbá az is, hogy $\mathrm{Sp}_p(S) = \emptyset$.

7.17. Tétel. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$, akkor $\mathrm{Sp}(A)$ kompakt halmaz és része a 0 középű $r = \|A\|$ sugarú zárt körlapnak.*

Bizonyítás. A 7.12 Állítás alapján nyilvánvaló. ■

7.18. Állítás. *Legyen E Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(E)$. Ha A invertálható, akkor*

$$\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \,\middle|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \right\} \tag{7.6}$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, akkor az

$$A^{-1} - \lambda I = A^{-1}(I - \lambda A) = -\lambda A^{-1}(A - \tfrac{1}{\lambda} I)$$

egyenlőségből világos, hogy $\lambda \in \varrho(A^{-1})$ pontosan akkor, ha $\frac{1}{\lambda} \in \varrho(A)$, amiből (7.6) már következik. ■

7.19. Jacobson-lemma. *Legyen E Banach-tér és legyenek $A, B \in \mathscr{B}(E)$ korlátos operátorok, akkor*

$$\mathrm{Sp}(AB) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(BA) \cup \{0\}.$$

Bizonyítás. Elsőként azt mutatjuk meg, hogy ha $AB - I$ invertálható, akkor $BA - I$ is invertálható és $C := (AB - I)^{-1}$ választással

$$(BA - I)^{-1} = BCA - I. \tag{7.7}$$

Valóban, az $I = C(AB - I) = CAB - C$ egyenlőséget balról a B operátorral, jobbról pedig A-val szorozva kapjuk, hogy

$$BA = BCABA - BCA = BCA(BA - I),$$

amiből nyerjük, hogy $BA - I = BCA(BA - I) - I$, amiből átrendezés után adódik, hogy

$$I = BCA(BA - I) - (BA - I) = (BCA - I)(BA - I),$$

vagyis $BCA - I$ balinverze a $BA - I$ operátornak. Hasonlóan igazolható, hogy $BCA - I$ egyúttal jobbinverze is a $(BA - I)$ operátornak, amiből (7.7) már adódik.

Legyen ezek után λ egy tetszőleges nem-nulla szám, hogy $\lambda \notin \mathrm{Sp}(AB)$, vagyis amelyre $AB - \lambda I$ invertálható. Ekkor $\frac{1}{\lambda}AB - I$ is invertálható, így az előzőek alapján $\frac{1}{\lambda}BA - I$ is invertálható, amiből $\lambda \notin \mathrm{Sp}(BA)$ következik. Ezzel megmutattuk, hogy bármely λ nem-nulla számra $\lambda \notin \mathrm{Sp}(AB)$ pontosan akkor, ha $\lambda \notin \mathrm{Sp}(BA)$, amiből a lemma állítása már következik. ■

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ha E *komplex* Banach-tér, akkor bármely $A \in \mathscr{B}(E)$ operátor spektruma nem-üres.

7.20. Lemma. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$, akkor az R_A rezolvens függvény a $\varrho(A)$ rezolvens halmaz minden pontjában differenciálható és az A tetszőleges λ_0 reguláris értéke esetén*

$$R'_A(\lambda_0) := \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_A(\lambda) - R_A(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = (A - \lambda_0 I)^{-2}$$

Bizonyítás. a (7.5) rezolvens azonosság alapján tetszőleges λ_0 és λ reguláris értékek esetén

$$\frac{R_A(\lambda) - R_A(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = R_A(\lambda) R_A(\lambda_0),$$

így az R_A függvény folytonossága alapján

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_A(\lambda) - R_A(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} R_A(\lambda) R_A(\lambda_0) = R_A(\lambda_0)^2,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. ■

7.21. Tétel. *Legyen E komplex Banach-tér, akkor bármely $A \in \mathscr{B}(E)$ operátor esetén* $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy az $A \in \mathscr{B}(E)$ operátor spektruma üres, akkor az R_A rezolvens függvény az egész $\mathbb{C}$ komplex számtesten értelmezett. Legyen $f \in \mathscr{B}(E)'$ egy tetszőleges folytonos lineáris funkcionál, és vezessük be a

$$\varphi(\lambda) := f((A - \lambda I)^{-1}), \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

egyenlőséggel értelmezett $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt (vagyis $\varphi = f \circ R_A$). Az előző Lemma és az f funkcionál folytonossága alapján kapjuk, hogy tetszőleges $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ szám esetén

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} f\left(\frac{R_A(\lambda) - R_A(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) = f((A - \lambda_0 I)^{-2}).$$

Ezzel megmutattuk, hogy φ bármely $\lambda \in \mathbb{C}$ pontban differenciálható (tehát φ egészfüggvény), a deriváltjára pedig fennáll, hogy

$$\varphi'(\lambda) = f((A - \lambda_0 I)^{-2}), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7.8}$$

Megmutatjuk, hogy φ korlátos függvény: legyen ui. $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geq 2\|A\|$, vagyis $\frac{\|A\|}{|\lambda|} < \frac{1}{2}$, akkor a 7.6 Következménybeli becslést alkalmazva

$$|\varphi(\lambda)| \leq \|f\| \|(A - \lambda I)^{-1}\| = \|f\| \left\| \frac{1}{\lambda} \left(\frac{A}{\lambda} - I \right)^{-1} \right\| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{\|f\|}{|\lambda| - \|A\|} \leq \frac{\|f\|}{\|A\|}.$$

A fenti becslésből már következik, hogy a φ egészfüggvény korlátos, ezért a komplex függvénytanból jól ismert Liouville-tétel alapján φ konstans. Következésképp φ derivált függvénye mindenütt nulla, speciálisan $\varphi'(0) = 0$, amiből (7.8) felhasználásával nyerjük, hogy

$$f(A^{-2}) = 0.$$

Mivel ez igaz tetszőleges f folytonos lineáris funkcionál esetén, továbbá a $\mathscr{B}(E)$ normált teret a Hahn-Banach tétel szerint $\mathscr{B}(E)'$ szeparálja, azért $A^{-2} = 0$, ami lehetetlen. ■

Fontos megjegyeznünk, hogy az imént bizonyított tétel kizárólag komplex Banach-terekben érvényes. Tekintsük ui. az $E = \mathbb{R}^2$ valós Banach-teret és abban az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

lineáris operátort, akkor egyszerű számolás mutatja, hogy bármely λ valós szám esetén $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$ teljesül, és ezért $A - \lambda I$ invertálható. Ez azt jelenti, hogy $\lambda \in \varrho(A)$, vagyis $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

7.3. A spektrálsugár

Az alábbiakban bevezetjük egy $A \in \mathscr{B}(E)$ korlátos operátor spektrálsugarát a következőképp:

7.22. Definíció. Legyen E Banach-tér, akkor egy $A \in \mathscr{B}(E)$ korlátos operátor esetén az

$$r(A) := \inf_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1} \|A^n\|^{1/n}$$

nem-negatív számot az A operátor *spektrálsugarának* nevezzük.

Világos, hogy bármely korlátos operátor spektrálsugara véges szám, hiszen a definíció alapján látható, hogy

$$r(A) \leq \|A\|.$$

7.23. Spektrálsugár tétel. *Legyen E Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(E)$ egy korlátos operátor, akkor $A \in \mathscr{B}(E)$ spektrálsugarára fennáll, hogy*

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Bizonyítás. A spektrálsugár értelmezése alapján világos, hogy minden n pozitív egész szám mellett $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$, emiatt elegendő azt igazolni, hogy bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén valamely alkalmas n_0 küszöbindextől kezdve fennáll, hogy $\|A^n\|^{1/n} < r(A) + \varepsilon$. Ennek igazolásához rögzítsünk egy $r(A) < r < r(A) + \varepsilon$ számot, és az infimum értelmezése alapján válasszunk olyan k természetes számot, hogy $\|A^k\| \leq r^k$. Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq k$ tetszőleges, akkor egyértelműen létezik olyan $m \in \mathbb{N}$ és $p \in \mathbb{N}$, $p < k$, hogy $n = mk + p$, ekkor a norma szubmultiplikativitását használva kapjuk, hogy

$$\|A^n\| \leq \|A^{mk}\|\|A^p\| \leq \|A^k\|^m \|A\|^p \leq r^{km}\|A\|^p,$$

következésképp az $M := \max\{1, \|A\|, \dots, \|A\|^k\}$ jelölést bevezetve

$$\|A^n\|^{1/n} \leq r^{\frac{mk}{n}} \cdot M^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{n-k}{n}} \cdot M^{\frac{1}{n}}.$$

Mivel a jobb oldalon álló sorozat $n \to \infty$ esetén az r számhoz tart, azért a fenti egyenlőtlenségből már látható, hogy alkalmasan nagy n_0 küszöbindextől kezdve $\|A^n\|^{1/n} < r(A) + \varepsilon$ teljesül, amivel igazoltuk, hogy $\|A^n\|^{1/n} \to r(A)$. ■

7.24. Tétel. *Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$ egy korlátos operátor, akkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > r(A)$ szám az A operátor reguláris értéke, továbbá ilyenkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ sor konvergens, emellett fennáll az alábbi egyenlőség:*

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{7.9}$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy r pozitív valós számot, amelyre $r(A) < r < |\lambda|$, akkor a spektrálsugár tétel szerint létezik olyan n_0 index, hogy minden $n \geq n_0$ pozitív egész szám esetén $\|A^n\|^{1/n} < r$. Következésképp minden $n \geq n_0$ szám esetén

$$\frac{\|A\|^n}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \left(\frac{r}{|\lambda|}\right)^n,$$

ahol $\dfrac{r}{|\lambda|} < 1$, ezért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-(n+1)} A^n$ sor abszolút konvergens, így konvergens is. Jelölje

$$B := -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

a megfelelő sor összegét, akkor

$$(A - \lambda I)B = B(A - \lambda I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = I$$

amiből a (7.9) már adódik. ∎

Az előző fejezetben láttuk, hogy tetszőleges $a \in \mathscr{B}(E)$ elem spektruma kompakt, és $\mathrm{Sp}(A)$ része a $\mathbb{K}$ számtestbeli nulla középű $r = \|a\|$ sugarú zárt egységgömbnek. A fenti tétel következményeként adódik az alábbi élesebb eredmény:

7.25. Következmény. *Legyen E Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(E)$, akkor* $\mathrm{Sp}(A)$ *része a $\mathbb{K}$ számtestbeli nulla középű $r(A)$ sugarú zárt gömbnek:*

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq r(A)\}. \tag{7.10}$$

A fejezet legfontosabb eredménye az alábbi tétel, amely szerint *komplex* Banach-tér esetén egy operátor spektrálsugara megegyezik a legnagyobb abszolútértékű spektrumpont hosszával:

7.26. Tétel. *Legyen E komplex Banach-tér, akkor tetszőleges $A \in \mathscr{B}(E)$ korlátos operátor spektrálsugarára fennáll, hogy*

$$r(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|. \tag{7.11}$$

Bizonyítás. Ha $r(A) = 0$, akkor $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, ugyanis a 7.5 Tétel és a 7.25 Következmény szerint $\mathrm{Sp}(A)$ olyan nem-üres halmaz, amely része a $\mathbb{C}$-beli 0 középű $r(A) = 0$ sugarú zárt körlapnak. Ebben az esetben tehát triviálisan teljesül a (7.11) egyenlőség. Tegyük fel tehát, hogy $r(A) > 0$ és indirekt módon azt is, hogy az A legnagyobb abszolút értékű λ_0 spektrumpontjára $|\lambda_0| < r(A)$ teljesül. A 7.20 Lemma szerint bármely $f \in \mathscr{B}(E)'$ folytonos lineáris funkcionál esetén a

$$\varphi(\lambda) := f((A - \lambda I)^{-1}), \qquad \lambda \in \varrho(A)$$

egyenlőséggel értelmezett $\varphi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvény differenciálható a $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > |\lambda_0|\}$ halmazon, továbbá a 7.24 Tétel szerint a $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r(A)\}$ halmazon $\varphi(\lambda)$ értéke az alábbi Laurent-sor alakban adható meg:

$$\varphi(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}. \tag{7.12}$$

A komplex függvénytanból jól ismert Laurent-tétel értelmében a (7.12) jobb oldalán szereplő sor bármely $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > |\lambda_0|$ szám esetén is konvergens és fennáll a

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}} = f((A - \lambda I)^{-1}), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > |\lambda_0|$$

egyenlőség. Rögzítsünk ezek után egy $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda_0| < |\lambda| < r(A)$ számot és minden $n \in \mathbb{N}$ mellett tekintsük az

$$F_n(f) := \frac{f(A^n)}{\lambda^n}, \qquad f \in \mathscr{B}(E)',$$

egyenlőséggel értelmezett $F_n : \mathscr{B}(E)' \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált. Másképp fogalmazva, a $B_n := \frac{A^n}{\lambda^n} \in \mathscr{B}(E)$ jelölést bevezetve $F_n = \widehat{B_n} \in \mathscr{B}(E)''$, vagyis F_n megegyezik a $B_n \in \mathscr{B}(E)$ operátor $J : \mathscr{B}(E) \to \mathscr{B}(E)''$ természetes beágyazás általi képével. Az eddigiek szerint bármely $f \in \mathscr{B}(E)'$ funkcionál esetén a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n(f)$ numerikus sor konvergens, speciálisan az $(F_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ sor korlátos, ami azt jelenti, hogy az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{B}(E)''$-beli funkcionálsorozat pontonként korlátos. Banach egyenletes korlátosság tétele szerint $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen korlátos, vagyis létezik olyan $M \geq 0$ konstans, hogy $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|F_n\| \leq M$. Másfelől a $J : \mathscr{B}(E) \to \mathscr{B}(E)''$ kanonikus beágyazás izometria, miszerint $\|F_n\| = \frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n}$, ezért

$$\|A^n\| \leq M \cdot |\lambda|^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

amiből n-edik gyökvonás és $n \to \infty$ mellett kapjuk, hogy $r(A) \leq |\lambda|$, ami ellentmondás. ■

7.4. Hilbert-tér operátorok spektruma

Az alábbiakban legyen $\mathcal{H}$ egy komplex Hilbert-tér.

7.27. Állítás. *Legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ korlátos operátor, akkor fennállnak a következők:*

(a) *ha A invertálható, akkor A^* is invertálható és $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$,*
(b) $\mathrm{Sp}(A^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$,
(c) $r(A) = r(A^*)$.

Bizonyítás. (a) Ha $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ invertálható elem, akkor

$$(A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I^* = I, \qquad \text{illetve} \qquad A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I,$$

amivel (a)-t igazoltuk.

(b) Legyen $\lambda \in \varrho(A)$, akkor (a) szerint $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda} I$ invertálható, ami pontosan azt jelenti, hogy $\bar{\lambda} \in \varrho(A)$. Ebből pedig (b) már egyszerűen következik.

(c) A (b) pont alapján fennáll a

$$\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\bar{\lambda}| = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

egyenlőség, amiből $r(A) = r(A^*)$ már következik. ■

7.28. Példa. Legyen $\mathcal{H}$ a négyzetesen szummálható komplex sorozatok ℓ^2 Hilbert-tere és tekintsük ezen az

$$S(x_0, x_1, \ldots) := (x_1, x_2, \ldots), \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

hozzárendeléssel definiált $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ bal-shift operátort. Megmutatjuk, hogy

$$\mathrm{Sp}(S) = \mathbb{D}. \tag{7.13}$$

Az $\mathrm{Sp}(S) \subseteq \mathbb{D}$ tartalmazás világos az $\|S\| = 1$ egyenlőségből és a 7.12 Állításból. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{Int}\,\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Sp}(S)$. Legyen ui. $\lambda \in \mathbb{C}, 0 < |\lambda| < 1$, és tekintsük azt az $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely n-edik tagjára $x_n = \lambda^n$. Világos, hogy $x \in \ell^2$, $x \neq 0$, és egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$Sx = \lambda x,$$

következésképp $\ker(S - \lambda I) \neq \{0\}$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$. Ha pedig $\lambda = 0$, akkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $x_0 = 1$, $x_n := 0$, $(n \geq 1)$, egyenlőséggel értelmezett $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $x \in \ker S$ teljesül vagyis $0 \in \mathrm{Sp}(S)$. Ezzel igazoltuk, hogy S spektrumára

$$\mathrm{Int}\,\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Sp}(S) \subseteq \mathbb{D}$$

teljesül, amiből a spektrum zártsága alapján (7.13) következik.

A következőkben a spektrum és a numerikus értékkészlet kapcsolatát vizsgáljuk meg. Ehhez szükségünk lesz a következő segédtételre:

7.29. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex prehilbert-tér és legyen $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ egy korlátos operátor, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) *T invertálható,*
(ii) *$\ker(T^*) = \{0\}$ és létezik olyan $C > 0$ állandó, hogy*

$$\|Tx\|^2 \geq C\|x\|^2, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Bizonyítás. A $\ker(T^*) = [\mathrm{ran}\,T]^\perp$ összefüggés szerint $\ker(T^*) = \{0\}$ azzal ekvivalens, hogy T képtere sűrű $\mathcal{H}$-ban, ezért a bizonyítandó ekvivalencia következik a 7.3 Állításból. ■

7.30. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ korlátos operátor, akkor*

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \overline{W(A)}. \tag{7.14}$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, akkor az előző lemma alapján vagy $\ker(A^* - \bar{\lambda}I) \neq \{0\}$, vagy pedig létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa egy-normájú $\mathcal{H}$-beli vektorokból álló sorozat, hogy $(A - \lambda I)x_n \to 0$. Előbbi esetben válasszunk egy $x \in \ker(A^* - \bar{\lambda}I)$, $\|x\| = 1$ vektort, akkor

$$0 = (x \,|\, (A^* - \bar{\lambda}I)x) = ((A - \lambda I)x \,|\, x) = (Ax \,|\, x) - \lambda,$$

azaz $\lambda = (Ax \,|\, x) \in W(A)$. Utóbbi esetben jelölje $\lambda_n := (Ax_n \,|\, x_n)$, akkor minden n-re $\|x_n\| = 1$ miatt $\lambda_n \in W(A)$, emellett

$$|\lambda_n - \lambda| = |(Ax_n - \lambda x_n \,|\, x_n)| \leq \|(A - \lambda I)x_n\| \to 0,$$

vagyis $\lambda_n \to \lambda$, amiből $\lambda \in \overline{W(A)}$ következik. Ezzel igazoltuk, hogy bármely $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ számra $\lambda \in \overline{W(A)}$ teljesül, amivel a (7.14) tartalmazást beláttuk. ■

7.31. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, akkor*

$$r(A) \leq w(A) \leq \|A\|.$$

Bizonyítás. A 3.63 Tétel szerint fennáll a $w(A) \leq \|A\|$ becslés, illetve a 7.26 Tétel szerint

$$r(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|,$$

így a $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \overline{W(A)}$ tartalmazás alapján $r(A) \leq w(A)$. ∎

A fenti következményben mindegyik egyenlőtlenség lehet szigorú, igaz azonban az alábbi érdekes

7.32. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan korlátos operátor, melyre $w(A) = \|A\|$, akkor egyúttal $r(A) = \|A\|$.*

Bizonyítás. A feltétel szerint létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa egy-normájú $\mathcal{H}$-beli vektorsorozat, hogy $(Ax_n \,|\, x_n) \to \lambda$ valamely $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = \|A\|$ számra. Mivel minden n-re

$$|(Ax_n \,|\, x_n)| \leq \|Ax_n\| \leq \|A\|,$$

azért $\|Ax_n\| \to \|A\|$, következésképp

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - (Ax_n \,|\, \lambda x_n) - (\lambda x_n \,|\, Ax_n) + |\lambda|^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq \|A\|^2 - \overline{\lambda}(Ax_n \,|\, x_n) - \lambda(x_n \,|\, Ax_n) + \|A\|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, ezért $r(A) \geq \|A\|$. ∎

8. FEJEZET

Korlátos operátorok Hilbert-téren

8.1. Ortogonális projekciók

Emlékeztetünk rá, hogy ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és ebben H egy zárt lineáris altér, akkor a 3.18 Riesz-féle ortogonális felbontási tétel szerint tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ vektor egyértelműen előáll

$$x = x_1 + x_2 \tag{8.1}$$

alakban, ahol $x_1 \in H$, míg $x_2 \in H^\perp$. Jelölje $P_H(x)$ a fenti (8.1) felbontásban szereplő x_1 vektort:

$$P_H(x) \coloneqq x_1$$

Akkor $P_H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ olyan függvény, amelyre tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ esetén $P_H(x) \in H$ és $x - P_H(x) \in H^\perp$. Nyilvánvaló továbbá, hogy $x \in H$ esetén $P_H(x) = x$, továbbá $x \in H^\perp$ esetén $P_H(x) = 0$. Az is világos továbbá, hogy $P_{H^\perp}$ – vagyis a H merőleges kiegészítő alterére való ortogonális projekció – előáll a

$$P_{H^\perp} = I - P_H$$

alakban.

A következőkben P_H-ra a rövidebb P jelölést alkalmazzuk

8.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen H ebben egy zárt lineáris altér, és jelölje P a H-ra való ortogonális projekciót. Ekkor $P \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $\|P\| \le 1$, emellett P önadjungált és idempotens:*

$$P = P^2 = P^*. \tag{8.2}$$

Bizonyítás. A linearitás igazolásához legyenek $x, y \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektorok, akkor az $x + y$ összeg vektor előáll

$$x + y = [P(x) + P(y)] + [x - P(x) + y - P(y)]$$

alakban, ahol $P(x), P(y) \in H$, és $x - P(x), y - P(y) \in H^\perp$, amiből látható, hogy $x_1 \coloneqq P(x) + P(y)$ és $x_2 \coloneqq x - P(x) + y - P(y)$ olyan vektorok, amelyekre $x + y = x_1 + x_2$, ahol $x_1 \in H$ és $x_2 \in H^\perp$, ezért a felbontás egyértelműségéből kapjuk, hogy

$$P(x + y) = P(x) + P(y),$$

vagyis P függvény additív. Hasonlóan igazolható a P homogenitása.

A P operátor folytonosságának igazolásához legyen $x \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges vektor, akkor $Px \in H$ és $x - Px \in H^\perp$ egymásra merőleges vektorok, ezért a Pithagorasz-tételből

$$\|Px\|^2 \le \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|Px + (x - Px)\|^2 = \|x\|^2,$$

vagyis $\|Px\| \le \|x\|$, amiből látható, hogy $P \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ és $\|P\| \le 1$.

Legyenek most $x, y \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektorok, akkor

$$(Px \mid y) = (Px \mid y - Py + Py) = (Px \mid Py) = (Px + x - Px \mid Py) = (x \mid Py),$$

amiből $P^* = P$ következik. Végül bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $Px \in H$, ezért $P^2x = P(Px) = Px$, amiből pedig a $P^2 = P$ egyenlőség adódik. Ezzel a (8.2) formulát és egyúttal a tételt is igazoltuk. ∎

8.2. Megjegyzés. Ha H nem a triviális altér $\mathcal{H}$-ban, akkor $\|P\| = 1$. Legyen ui. $x \in H$, $\|x\| = 1$ egy tetszőleges vektor, akkor $Px = x$ miatt $\|P\| \geq 1$.

8.3. Állítás. *Az előző tétel jelöléseivel a $P \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ ortogonális projekció mag-, illetve képterére fennállnak az alábbi azonosságok:*

$$\operatorname{ran} P = \ker(I - P) = H, \qquad \textit{illetve} \qquad \ker P = \operatorname{ran}(I - P) = H^\perp. \tag{8.3}$$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $Px \in H$, ezért $\operatorname{ran} P \subseteq H$. Másfelől $x \in H$ esetén $Px = x$ miatt $H \subseteq \operatorname{ran} P$, amiből a $\operatorname{ran} P = H$ egyenlőség következik.

Hasonlóképp, ha $x \in H^\perp$, akkor $Px = 0$, ezért $H^\perp \subseteq \ker P$, ha pedig $x \in \ker P$, akkor $x = Px + (x - Px) = x - Px$, vagyis $x = x - Px \in H^\perp$. Ezzel a $\ker P \subseteq H^\perp$ tartalmazást, és egyúttal a $\ker P = H^\perp$ egyenlőséget is beláttuk.

Végül a $\ker(I - P) = H$, valamint a $\operatorname{ran}(I - P) = H^\perp$ azonosságok következnek abból, hogy az $I - P$ operátor azonos a $P_{H^\perp}$ ortogonális projekcióval, valamint abból, hogy a fentiek szerint $\operatorname{ran} P_{H^\perp} = H^\perp$ és $\ker P_{H^\perp} = H^{\perp\perp} = H$. ∎

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a (8.2) formula karakterizálja az ortogonális projekciókat.

8.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $P \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan folytonos lineáris operátor, amely önadjungált és idempotens:*

$$P = P^2 = P^*.$$

Akkor P megegyezik a $H := [\ker P]^\perp$ zárt altérre való ortogonális projekcióval.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy P önadjungáltsága folytán fennáll a $\operatorname{ran} P \subseteq [\ker P]^\perp = H$ tartalmazás. Legyen ezután $x \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges vektor, akkor x előáll az

$$x = Px + (x - Px)$$

alakban, ahol $Px \in \operatorname{ran} P \subseteq H$, másrészt $P(x - Px) = Px - P^2x = 0$, vagyis $x - Px \in \ker P = H^\perp$, ami azt jelenti, hogy Px megegyezik az x vektor H altérre való merőleges vetületével. Ezzel megmutattuk, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ vektor esetén fennáll a $Px = P_Hx$ azonosság, azaz $P = P_H$. ∎

8.5. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $P, Q \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ ortogonális projekciók, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) $P = Q$,
(ii) $\ker P = \ker Q$,
(iii) $\operatorname{ran} P = \operatorname{ran} Q$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző állítás alapján. ∎

8.6. Állítás. *Ha $P, Q \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ ortogonális projekciók, akkor $PQ = 0$ pontosan akkor teljesül, ha P és Q képterei egymásra merőlegesek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $PQ = 0$ és jelölje $M := \operatorname{ran} P$, illetve $N := \operatorname{ran} Q$, akkor $u \in M$ és $v \in N$ esetén $Pu = u$ és $Qv = v$, ezért

$$(v \mid u) = (Qv \mid Pu) = (PQv \mid u) = 0,$$

vagyis v és u egymásra merőlegesek. Megfordítva tegyük fel, hogy M és N egymásra merőlegesek, akkor bármely $x, y \in \mathcal{H}$ vektorok esetén $Px \in M$ és $Qy \in N$, ezért

$$(Qy \mid Px) = (PQy \mid x) = 0,$$

amiből a $PQ = 0$ egyenlőség adódik. ■

8.7. Példa. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $e \in \mathcal{H}$, $\|e\| = 1$ egy tetszőleges vektor és jelölje $H := \mathbb{K}e$ az e által generált egy-dimenziós alteret $\mathcal{H}$-ban. Akkor a H altérre való $P := P_H$ ortogonális projekció előáll

$$Px = (x \mid e)e, \qquad x \in \mathcal{H}$$

alakban. Valóban, ha $x \in \mathcal{H}$, akkor egyrészt $(x \mid e)e \in H$, másfelől $x' := x - (x \mid e)e$ jelöléssel

$$(x' \mid e) = (x \mid e) - (x \mid e) = 0,$$

vagyis $x' \in H^{\perp}$, amiből az $(x \mid e)e = Px$ egyenlőség már következik.

8.8. Példa. Hasonlóképp igazolható, hogy ha $e_1, \ldots, e_n$ véges ortonormált sorozat $\mathcal{H}$-ban és H jelöli az $e_1, \ldots, e_n$ vektorok által generált véges dimenziós alteret, akkor a H altérre való $P := P_H$ ortogonális projekció előáll

$$Px = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)e_k, \qquad x \in \mathcal{H}$$

alakban.

Ha pedig $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat és H jelöli az $e_1, e_2, \ldots$ vektorok által generált zárt lineáris alteret, akkor a H altérre való $P := P_H$ ortogonális projekció előáll

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} (x \mid e_k)e_k, \qquad x \in \mathcal{H}$$

alakban. Ennek bizonyítását megadtuk a 3.35 Tételben.

Az ortogonális projekciók spektrumával foglalkozik az alábbi

8.9. Állítás. *Tetszőleges $P \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ ortogonális projekció spektrumára fennáll, hogy*

$$\operatorname{Sp}(P) \subseteq \{0, 1\}.$$

Ha $P \neq 0$ és $P \neq I$, akkor $\operatorname{Sp}(P) = \{0, 1\}$.

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\lambda(1 - \lambda)I = [P - \lambda I][P - (1 - \lambda)I],$$

amiből világos, hogy $\lambda \notin \{0, 1\}$ esetén $\lambda \in \varrho(P)$ és fennáll a

$$(P - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda(1 - \lambda)}[P - (1 - \lambda)I]$$

formula. Ha pedig $P \neq 0$ és $P \neq I$, akkor P és $I - P$ egyike sem injektív (és nem is szürjektív), amiből látható, hogy $\{0, 1\} \subseteq \mathrm{Sp}(P)$. ∎

8.2. Izometrikus és unitér operátorok

Az alábbiakban emlékeztetünk az izometrikus és unitér operátorok definíciójára:

8.10. Definíció. Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek.

(a) A $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ operátort *izometrikusnak* nevezzük, ha minden $x \in \mathcal{H}$ vektor esetén $\|Vx\| = \|x\|$.
(b) Az $U \in \mathscr{B}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ operátort *unitérnek* nevezzük, ha U izometrikus bijekció.

Nyilvánvaló, hogy minden unitér operátor izometrikus, ennek megfordítása általában nem igaz. A definíció alapján ui. nyilvánvaló, hogy minden unitér operátor szürjektív, ugyanakkor végtelen dimenziós Hilbert-téren létezhetnek olyan nem szürjektív izometrikus operátorok (például ℓ^2-n a jól ismert „shift" operátor ilyen).

Az alábbiakban jellemzést adunk Hilbert-téren értelmezett izometrikus operátorokra:

8.11. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ folytonos lineáris operátor. Az alábbi kijelentések egyenértékűek:*

(i) *V izometria,*
(ii) *V skalárszorzat tartó, azaz minden $x, y \in \mathcal{H}$ mellett $(Vx \,|\, Vy) = (x \,|\, y)$,*
(iii) *$V^*V = I$, ahol I a $\mathcal{H}$ identikus operátora.*

Bizonyítás. (i)⇒(iii): Legyen V izometria, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén

$$\|x\|^2 = \|Vx\|^2 = (Vx \,|\, Vx) = (V^*Vx \,|\, x),$$

amiből az $I = V^*V$ egyenlőség komplex Hilbert-tér esetén adódik. Valós Hilbert-tér esetén a polarizációs formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
4(x \,|\, y) &= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \\
&= (V^*V(x + y) \,|\, x + y) - (V^*V(x - y) \,|\, x - y) \\
&= \|Vx + Vy\|^2 - \|Vx - Vy\|^2 \\
&= 4(Vx \,|\, Vy) \\
&= 4(V^*Vx \,|\, y),
\end{aligned}$$

azaz minden x, y vektor esetén fennáll, hogy $(x \,|\, y) = (V^*Vx \,|\, y)$, vagyis $I = V^*V$. A hiányzó (iii)⇒(ii) és (ii)⇒(i) implikációk mindegyike nyilvánvaló. ∎

8.12. Állítás. *Ha $V \in \mathscr{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ izometria, akkor V képtere zárt.*

Bizonyítás. Legyen $y \in \overline{\mathrm{ran}\, V}$ és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathcal{H}$-beli sorozat, hogy $Vx_n \to y$, akkor bármely n, m esetén $\|x_n - x_m\| = \|Vx_n - Vx_m\|$, amiből leolvasható, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben. Következésképp $x_n \to x$ valamely $x \in \mathcal{H}$ vektorra, és ezért V folytonossága alapján $Vx_n \to Vx$, vagyis $Vx = y$. Következésképp $y \in \mathrm{ran}\, V$, amivel igazoltuk, hogy $\mathrm{ran}\, V$ zárt. ∎

Az unitér operátorokra az alábbi jellemzés adható:

8.13. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $U \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) *U unitér operátor,*
(ii) *$U^*U = I_{\mathcal{H}}$ és $UU^* = I_{\mathcal{K}}$, ahol $I_{\mathcal{H}}$, illetve $I_{\mathcal{K}}$ jelöli a $\mathcal{H}$, illetve $\mathcal{K}$ Hilbert-terek identikus operátorát,*
(iii) *U és U^* mindketten izometrikus operátorok.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii): Ha U unitér operátor, akkor egyrészt U izometrikus, vagyis $U^*U = I_{\mathcal{H}}$, másfelől U invertálható és $U^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{K};\mathcal{H})$, ezért

$$UU^* = U(U^*U)U^{-1} = I_{\mathcal{K}},$$

amivel (ii)-t igazoltuk.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Mivel $U^*U = I_{\mathcal{H}}$, azért az előző állítás szerint U izometrikus, és hasonlóképp, $UU^* = U^{**}U^* = I_{\mathcal{K}}$ miatt U^* is izometrikus.

(iii)$\Rightarrow$(i): A feltétel szerint U izometrikus operátor, emellett az $UU^* = I_{\mathcal{K}}$ egyenlőségből leolvasható, hogy U szürjektív, vagyis U unitér operátor. ■

8.14. Állítás. *Legyen $U \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ unitér operátor, akkor*

$$\mathrm{Sp}(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}.$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq 1\}$. Mivel U és U^{-1} mindketten unitér operátorok, azért $\|U^{-1}\| = \|U\| = 1$, így $\mathrm{Sp}(U) \subseteq \mathbb{D}$, illetve $\mathrm{Sp}(U^{-1}) \subseteq \mathbb{D}$. Másfelől U^{-1} spektruma előáll

$$\mathrm{Sp}(U^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \,\middle|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(U) \right\}$$

alakban, ami azt jelenti, hogy bármely $\lambda \in \mathrm{Sp}(U)$ számra $\lambda, \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{D}$ teljesül, ami csak úgy lehetséges, ha $|\lambda| = 1$. ■

8.15. Megjegyzés. Vigyázzunk arra, hogy valós Hilbert-tér esetén egy unitér operátor spektruma üres is lehet, ahogyan azt $\mathcal{H} := \mathbb{R}^2$ felett az

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

operátor példája mutatja.

8.3. Önadjungált és pozitív operátorok

Az alábbiakban mindenütt legyen $\mathcal{H}$ egy valós vagy komplex Hilbert-tér. Emlékeztetünk rá, hogy egy $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ korlátos operátort *önadjungáltnak* nevezünk, ha $A = A^*$. Az önadjungáltság *komplex* Hilbert-terek esetén a következőképp jellemezhető:

8.16. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, akkor az alábbi kijelentések egyenértékűek:*

(i) *A önadjungált,*
(ii) *minden $x, y \in \mathcal{H}$ mellett $(Ax \mid y) = (x \mid Ay)$,*
(iii) *minden $x \in \mathcal{H}$ mellett $(Ax \mid x) = (x \mid Ax)$,*
(iv) *minden $x \in \mathcal{H}$ mellett $(Ax \mid x)$ valós.*

Bizonyítás. A 3.59 Következmény szerint komplex Hilbert-téren adott $S, T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátorok pontosan akkor egyenlőek, ha minden $x \in \mathcal{H}$ esetén $(Sx \mid x) = (Tx \mid x)$. A Tétel ebből egyszerűen igazolható. ■

8.17. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, akkor egy $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor pontosan akkor önadjungált, ha $W(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Az adjungálás tulajdonságait kihasználva egyszerűen igazolható az alábbi

8.18. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér, illetve legyenek $S, T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok.*

(a) *Ha S, T önadjungált, akkor $S + T$ is önadjungált,*
(b) *Ha T önadjungált, akkor bármely α valós szám esetén αT is önadjungált.*
(c) *$T + T^*$, TT^* és T^*T mindegyike önadjungált.*
(d) *Ha S és T önadjungáltak, akkor az ST szorzat pontosan akkor önadjungált, ha S és T egymással felcserélhető.*

Ha $\lambda \in \mathbb{C}$ egy komplex szám, akkor λ egyértelműen előáll $\lambda = \alpha + i\beta$ alakban alkalmas α, β valós számokra. Ennek a felbontásnak az operátorokra vonatkozó analogonját mondja ki az alábbi

8.19. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér és legyen $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ egy tetszőleges folytonos lineáris operátor, akkor egyértelműen léteznek olyan $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátorok, amelyekkel T előáll $T = A + iB$ alakban, éspedig*

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \qquad B = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás mutatja, hogy A és B mindketten önadjungáltak, illetve hogy $T = A + iB$. Ha pedig C és D olyan önadjungált operátorok, hogy $T = C + iD$, akkor $T^* = C - iD$, következésképp $\frac{1}{2}(T + T^*) = C$ és $\frac{1}{2i}(T - T^*) = D$, amivel a felbontás egyértelműségét is igazoltuk. ■

Az A önadjungált operátort pozitívnak mondjuk, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív szemidefinit, azaz

$$(Ax \mid x) \geq 0, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

8.20. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, akkor egy $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátor pontosan akkor pozitív, ha minden x-re $(Ax \mid x) \geq 0$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló a 8.16 Tétel alapján. ■

A definíció alapján egyszerűen ellenőrizhető a következő

8.21. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér.*

(a) *Ha $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátorok, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \geq 0$ számok mellett $\alpha A + \beta B$ is pozitív operátor.*
(b) *Ha $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ tetszőleges, akkor T^*T és TT^* pozitív operátor.*

8.22. Definíció. Legyen E valós vagy komplex vektortér, akkor egy $s : E \times E \to \mathbb{K}$ függvényt *félskalárszorzatnak* nevezünk, ha s eleget tesz az alábbi követelményeknek:

(1) minden $y \in E$ mellett az $s(\cdot, y)$ parciális függvény lineáris,

(2) minden $x, y \in E$ mellett $s(x,y) = \overline{s(y,x)}$,
(3) minden $x \in E$ mellett $s(x,x) \geq 0$.

Világos, hogy egy félskalárszorzat mindössze annyiban különbözik a skalárszorzattól, hogy ez előbbi csupán pozitív szemidefinit, vagyis az $s(x,x) = 0$ egyenlőségből nem feltétlenül következik, hogy $x = 0$.

Nyilvánvaló továbbá az is, hogy ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor egy $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátor pontosan akkor pozitív, ha az

$$s(x,y) \coloneqq (Ax \,|\, y), \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel definiált s leképezés félskalárszorzat.

Első eredményként igazoljuk az alábbi félskalárszorzatokra vonatkozó *Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget*:

8.23. Tétel. *Legyen s félskalárszorzat az E valós vagy komplex vektortéren, akkor*

$$|s(x,y)|^2 \leq s(x,x)s(y,y), \qquad x, y \in E. \tag{8.4}$$

Bizonyítás. Elsőként tegyük fel, hogy $s(x,x) = s(y,y) = 0$, akkor $u \coloneqq x - s(x,y)y$ választással kapjuk, hogy

$$0 \leq s(u,u) = -s(x,y)s(y,x) - \overline{s(x,y)}s(x,y) = -2|s(x,y)|^2 \leq 0,$$

következésképp $s(x,y) = 0$, ami azt jelenti, hogy (8.4) egyenlőséggel teljesül. Tegyük fel, hogy $s(y,y) \neq 0$, akkor $u \coloneqq s(y,y)x - s(x,y)y$ választással

$$0 \leq s(u,u) = s(y,y)[s(y,y)s(x,x) - |s(x,y)|^2] \leq 0,$$

amit $s(y,y)$-nal egyszerűsítve éppen a (8.4) egyenlőséget kapjuk. Hasonlóan adódik az egyenlőtlenség az $s(x,x) \neq 0$ esetben. ■

8.24. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, akkor*

$$|(Ax \,|\, y)|^2 \leq (Ax \,|\, x)(Ay \,|\, y), \qquad x, y \in \mathcal{H}. \tag{8.5}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget az

$$s(x,y) \coloneqq (Ax \,|\, y), \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

félskalárszorzatra. ■

8.25. Pozitív operátorra vonatkozó Schwarz-egyenlőtlenség. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, akkor*

$$\|Ax\|^2 \leq \|A\|(Ax \,|\, x), \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{8.6}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a (8.5) egyenlőtlenséget az $y = Ax$ választással, akkor

$$\|Ax\|^4 = |(Ax \,|\, y)|^2 \leq (Ax \,|\, x)(Ay \,|\, y) = (Ax \,|\, x)(A^2x \,|\, Ax),$$

amiből az

$$(A^2x \,|\, Ax) \leq \|A^2x\|\|Ax\| \leq \|A\|\|Ax\|^2$$

becslés figyelembevételével nyerjük, hogy

$$\|Ax\|^4 \leq \|A\|\|Ax\|^2(Ax \,|\, x),$$

amiből (8.6) már következik. ■

Az alábbiakban a pozitivitás fogalmára építve bevezetünk egy természetes rendezést az önadjungált operátorok halmazán:

8.26. Definíció. Legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátorok, akkor azt mondjuk, hogy $A \leq B$, ha $B - A$ pozitív operátor, azaz

$$(Ax \mid x) \leq (Bx \mid x), \qquad x \in \mathcal{H}.$$

8.27. Állítás. *A fenti „$\leq$" reláció rendezés az önadjungált operátorok terén, vagyis reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a $\leq$ reláció reflexív és tranzitív, továbbá komplex Hilbert-tér esetén a 3.59 Következményből nyerjük, hogy ha $A \leq B$ és $B \leq A$, akkor $A = B$. Ha pedig $\mathcal{H}$ valós Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, akkor bármely $x, y \in \mathcal{H}$ esetén fennáll, hogy

$$(A(x+y) \mid x+y) - (A(x-y) \mid x-y) = 2(Ax \mid y) + 2(Ay \mid x) = 4(Ax \mid y).$$

Ebből már következik, hogy ha $A \leq B$ és $B \leq A$ teljesül valamely $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátorokra, akkor

$$(Ax \mid y) = (Bx \mid y), \qquad x, y \in \mathcal{H},$$

és ezért $A = B$. ■

8.4. Önadjungált és pozitív operátorok spektruma

Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. Láttuk, hogy ha A önadjungált operátor, akkor A numerikus értékkészlete valós, és ha A pozitív operátor, akkor A numerikus értékkészlete nemnegatív. Ezekből és a 7.30 Tételből már egyszerűen adódik a következő

8.28. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$.*

(a) *Ha A önadjungált operátor, akkor* $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$.
(b) *Ha A pozitív operátor, akkor* $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Bizonyítás. (a) Ha A önadjungált, akkor $W(A) \subseteq \mathbb{R}$, és ezért egyúttal $\overline{W(A)} \subseteq \mathbb{R}$. A 7.30 Tétel szerint fennáll a $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \overline{W(A)}$ tartalmazás, amiből (a) már következik.

(b) Ha A pozitív, akkor $W(A) \subseteq \mathbb{R}_+$, és ezért egyúttal $\overline{W(A)} \subseteq \mathbb{R}_+$. A 7.30 Tétel alapján ebből (b) már következik. ■

Az alábbiakban rögzítsünk egy $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátort és jelölje

$$m := \inf_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} (Ax \mid x), \qquad M := \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} (Ax \mid x), \tag{8.7}$$

akkor $W(A) \subseteq [m, M]$ és ezért a 7.30 és 8.28 Tételek alapján fennáll a

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq [m, M]$$

tartalmazás.

8.29. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, akkor $m, M \in \mathrm{Sp}(A)$.*

Bizonyítás. Elsőként igazoljuk, hogy $m \in \operatorname{Sp}(A)$. Az m szám értelmezése alapján ui.

$$0 \leq (Ax \,|\, x) - m\|x\|^2 = ((A - mI)x \,|\, x), \qquad x \in \mathcal{H},$$

ami azt jelenti, hogy $A - mI$ pozitív operátor. Emellett ismét az m szám értelmezése alapján létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa egy-normájú vektorokból álló sorozat, hogy $(Ax_n \,|\, x_n) \to m$, vagyis

$$((A - mI)x_n \,|\, x_n) \to 0.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy $m \notin \operatorname{Sp}(A)$, akkor a 7.29 Lemma szerint létezik olyan $C > 0$ állandó, hogy

$$\|(A - mI)x\| \geq C\|x\|, \qquad x \in \mathcal{H},$$

speciálisan minden n-re

$$C^2 \leq \|(A - mI)x_n\|^2.$$

Ugyanakkor a 8.25 Tétel szerint

$$\|(A - mI)x_n\|^2 \leq \|A - mI\| \cdot ((A - mI)x_n \,|\, x_n) \to 0,$$

amivel ellentmondásra jutottunk.

Hasonlóan igazolható az $M \in \operatorname{Sp}(A)$ tartalmazás: Az M szám értelmezése alapján egyszerűen ellenőrizhető, hogy $MI - A$ pozitív operátor, ezért ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan csupa egy-normájú vektorokból álló sorozat, hogy $(Ax_n \,|\, x_n) \to M$, akkor ismét a 8.25 Tétel szerint

$$\|(MI - A)x_n\|^2 \leq \|MI - A\| \cdot ((MI - A)x_n \,|\, x_n) \to 0,$$

amiből a bizonyítás első felében alkalmazott elv alapján kapjuk, hogy $M \in \operatorname{Sp}(A)$. ■

8.30. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, akkor az előző állítás jelöléseivel*

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Bizonyítás. A numerikus sugár definíciója alapján

$$w(A) = \sup\Big\{ |(Ax \,|\, x)| \;\Big|\; x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \Big\} = \max\{|m|, |M|\},$$

továbbá a 3.65 Tétel szerint az A önadjungált operátorra fennáll, hogy $w(A) = \|A\|$. ■

8.31. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, akkor $\|A\| \in \operatorname{Sp}(A)$.*

Bizonyítás. Ha A pozitív operátor, akkor $0 \leq m \leq M$, ezért

$$\|A\| = \max\{m, M\} = M,$$

ahol a 8.29 Tétel szerint $M \in \operatorname{Sp}(A)$. ■

8.5. Pozitív operátor négyzetgyöke

8.32. Vigier-tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa önadjungált operátorokból álló sorozat, hogy minden n-re $A_n \leq A_{n+1}$ és $\|A_n\| \leq M$ teljesül valamely $M \geq 0$ konstanssal. Akkor létezik olyan $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, hogy*

$$A_n x \to Ax, \qquad x \in \mathcal{H},$$

azaz $A_n \to A$ pontonként a $\mathcal{H}$-n.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $x \in \mathcal{H}$ vektort, akkor a feltétel szerint az $\alpha_n := (A_n x \,|\, x)$ jelölést bevezetve $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, felülről korlátos sorozat, ui.

$$\alpha_n \leq \|A_n\|\|x\|^2 \leq M\|x\|^2,$$

következésképp $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ indexek, akkor a feltétel szerint $A_m - A_n \geq 0$, ezért a 8.25 Tétel szerint

$$\|A_m x - A_n x\|^2 \leq \|A_m - A_n\|((A_m - A_n)x \,|\, x) \leq 2M \cdot (\alpha_m - \alpha_n),$$

amiből látható, hogy $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben. A $\mathcal{H}$ teljessége miatt az $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért tekinthető az

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x, \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátor. Ekkor A korlátos operátor, éspedig $\|A\| \leq M$, ui. bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq M\|x\|.$$

Továbbá bármely $x, y \in \mathcal{H}$ vektorok esetén

$$(Ax \,|\, y) = \lim_{n\to\infty} (A_n x \,|\, y) = \lim_{n\to\infty} (x \,|\, A_n y) = (x \,|\, Ay),$$

ami azt jelenti, hogy A önadjungált. ■

Vegyük észre, hogy a fenti Vigier-tétel feltételei mellett az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ önadjungált operátorsorozat minden tagjára fennáll, hogy

$$A_0 \leq A_n \leq A,$$

amit úgy is kifejezhetünk, hogy az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat korlátos az önadjungált operátorok rendezett halmazában. Megjegyezzük továbbá azt is, hogy ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan csupa önadjungált operátorokból álló monoton növő sorozat, hogy $A_n \leq B$, $(n \in \mathbb{N})$ teljesül valamely $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátorra, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy minden $x \in \mathcal{H}$, $\|x\| = 1$ vektorra és n természetes számra

$$-\|A_0\| \leq (A_n x \,|\, x) \leq \|B\|,$$

amiből $w(A_n) = \|A_n\|$ figyelembevételével $\|A_n\| \leq M := \max\{\|A_0\|, \|B\|\}$ következik.

Ezzel a Vigier-tételnek a következő ekvivalens változatát igazoltuk:

8.33. Módosított Vigier-tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa önadjungált operátorokból álló sorozat, hogy minden n-re $A_n \leq A_{n+1}$ és $A_n \leq B$ teljesül valamely $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátorra. Akkor létezik olyan $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, hogy $A_n \to A$ pontonként a $\mathcal{H}$-n.*

8.34. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor. Ekkor létezik egyetlen $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, amelyre $B^2 = A$. Továbbá B felcserélhető minden olyan korlátos operátorral, amellyel A felcserélhető.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy A olyan pozitív operátor, amelyre $\|A\| \leq 1$, megmutatjuk, hogy létezik egyetlen olyan $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, amelyre

$$B = \frac{1}{2}(B^2 + A). \tag{8.8}$$

Ehhez értelmezzük a $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozatot az alábbi rekurzióval:

$$B_0 \coloneqq 0, \qquad B_{n+1} \coloneqq \frac{1}{2}(B_n^2 + A), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Megmutatjuk, hogy a $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat teljesíti a 8.32 Vigier-tétel feltételeit.

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden n-re $B_n \geq 0$, (ui. pozitív operátor négyzete, és véges sok pozitív operátor összege pozitív operátor), továbbá B_n felcserélhető minden olyan $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátorral, amellyel A felcserélhető.

Megmutatjuk, hogy $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat, azaz $B_n \leq B_{n+1}$ minden n-re. Ehhez először igazoljuk, hogy mind B_n, mind pedig $B_{n+1} - B_n$ előáll az A operátor nemnegatív együtthatós polinomjaként. Ez $n = 1$ esetén nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy léteznek olyan p és q nemnegatív valós együtthatós polinomok, hogy $B_n = p(A)$ és $B_n - B_{n-1} = q(A)$, akkor a rekurziós képlet alapján

$$\tilde{p}(x) \coloneqq \frac{1}{2}(p^2(x) + x)$$

olyan nemnegatív együtthatós polinom, amelyre $\tilde{p}(A) = B_{n+1}$, továbbá felhasználva, hogy $B_n B_{n-1} = B_{n-1} B_n$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B_{n+1} - B_n &= \frac{1}{2}(B_n^2 + A) - \frac{1}{2}(B_{n-1}^2 + A) \\ &= \frac{1}{2}(B_n^2 - B_{n-1}^2) \\ &= \frac{1}{2}(B_n + B_{n-1})(B_n - B_{n-1}), \end{aligned}$$

amiből látható, hogy $\tilde{q}(x) \coloneqq \frac{1}{2}(\tilde{p}(x) + p(x))q(x)$ olyan nemnegatív együtthatós polinom, amelyre $\tilde{q}(A) = B_{n+1} - B_n$. Ezzel megmutattuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett $B_{n+1} - B_n$ előáll az A operátor nemnegatív együtthatós polinomjaként, ezért valóban $B_{n+1} - B_n \geq 0$.

Végezetül tetszőleges $x \in \mathcal{H}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|B_{n+1}\| \leq \frac{1}{2}(\|B_n\|^2 + \|A\|),$$

amiből teljes indukcióval és $\|A\| \leq 1$ figyelembevételével már egyszerűen ellenőrizhető, hogy minden n-re $\|B_n\| \leq 1$.

Ezzel megmutattuk, hogy a $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat kielégíti a 8.32 Vigier-tétel feltételeit, ezért létezik olyan $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, amelyre $B_n \to B$ pontonként. Vegyük észre, hogy ekkor minden x-re $B_n^2 x \to B^2 x$, ugyanis $\|B_n\| \leq 1$ miatt

$$\begin{aligned} \|B_n^2 x - B^2 x\| &\leq \|B_n^2 x - B_n B x\| + \|B_n B x - B^2 x\| \\ &\leq \|B_n x - Bx\| + \|B_n(Bx) - B(Bx)\|, \end{aligned}$$

ahol $n \to \infty$ esetén a jobb oldalon álló mindkét tag nullához tart. Ebből már egyszerűen látható, hogy a B pozitív operátor kielégíti a (8.8) egyenletet, ui. bármely x-re

$$Bx = \lim_{n\to\infty} B_{n+1}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(B_n^2 + A)x = \frac{1}{2}(B^2 + A)x.$$

A B operátor definíciójából könnyen látható, hogy $\|B\| \le 1$, ha pedig $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan operátor, amely felcserélhető A-val, akkor T az A bármely polinomjával is felcserélhető, ezért minden n-re $B_nT = TB_n$, amiből könnyen látható, hogy $BT = TB$. Ezzel tehát megmutattuk, hogy bármely $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $\|A\| \le 1$ pozitív operátorhoz létezik olyan $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $\|B\| \le 1$ szintén pozitív operátor, amelyre $B = \frac{1}{2}(B^2 + A)$ és B felcserélhető minden olyan korlátos operátorral, amellyel A felcserélhető.

Legyen továbbra is $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $A \ge 0$, $\|A\| \le 1$ és alkalmazzuk a kapott eredményt A helyett az $I - A$ szintén pozitív operátorra. Akkor létezik olyan $C \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $\|C\| \le 1$ pozitív operátor, amelyre

$$C = \frac{1}{2}(C^2 + (I - A)),$$

továbbá C felcserélhető minden olyan T operátorral, amellyel A felcserélhető. Ekkor $B := I - C$ olyan pozitív operátor, amely minden A-val felcserélhető T operátorral felcserélhető, és amelyre

$$I - B = \frac{1}{2}[(I - B)^2 + (I - A)],$$

amit átrendezve kapjuk, hogy $B^2 = A$.

Végül legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ tetszőleges pozitív operátor, akkor $\frac{A}{\|A\|}$ legfeljebb egy normájú pozitív operátor, ezért a fentiek szerint létezik hozzá olyan $C \ge 0$, amelyre $C^2 = A$ és amely felcserélhető minden A-val kommutáló operátorral. Könnyen ellenőrizhető, hogy $B := \|A\|^{1/2} \cdot A$ olyan pozitív operátor, amely eleget tesz a tétel követelményeinek. Ezzel az egzisztencia részt igazoltuk.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy $C \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ szintén olyan pozitív operátor, amelyre $C^2 = A$. Megmutatjuk, hogy $C = B$, ahol B az egzisztencia rész bizonyítás során konstruált pozitív „négyzetgyök”. Vegyük észre, hogy

$$AC = C^2C = CC^2 = CA,$$

ezért a B operátorra igazoltak alapján $BC = CB$. Legyen most $u \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges vektor és jelölje $v := Bu - Cu$, akkor

$$((B + C)v \,|\, v) = ((B + C)(B - C)u \,|\, v) = (B^2u - C^2u \,|\, v) = 0,$$

amiből kapjuk, hogy $(Bv \,|\, v) = (Cv \,|\, v) = 0$, illetve a 8.25 Tétel alapján, hogy $Bv = Cv = 0$. Következésképp,

$$\|Bu - Cu\|^2 = ((B - C)(B - C)u \,|\, u) = ((B - C)v \,|\, u) = 0,$$

azaz $Bu = Cu$. Mivel ez az egyenlőség tetszőleges $u \in \mathcal{H}$ esetén fennáll, azért tehát $B = C$. Ezzel a pozitív négyzetgyök egyértelműségét és egyúttal a tételt is igazoltuk. ■

8.35. Definíció. Ha $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, akkor az A *pozitív négyzetgyökének* nevezzük azt az egyetlen $A^{1/2}$ (vagy $\sqrt{A}$) szimbólummal jelölt pozitív operátort, amelyre

$$(A^{1/2})^2 = A.$$

8.36. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert tér és $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) $A \geq 0$,
(ii) *létezik olyan* $B \geq 0$, *hogy* $B^2 = A$,
(iii) *létezik olyan* $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $S = S^*$, *hogy* $S^2 = A$,
(iv) *létezik olyan* $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, *hogy* $T^*T = A$.

Bizonyítás. A 8.34 Tétel alapján nyilvánvaló. ■

A négyzetgyök létezésének és kommutálási tulajdonságainak egy szép alkalmazását mutatja be az alábbi

8.37. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátorok, hogy $AB = BA$, akkor $AB \geq 0$.*

Bizonyítás. A feltétel szerint $AB = BA$, ezért az AB szorzat önadjungált. Másrészt a 8.34 Tétel szerint $A^{1/2}B = BA^{1/2}$ is teljesül, ezért AB előáll

$$AB = A^{1/2}(A^{1/2}B) = A^{1/2}BA^{1/2}$$

alakban, ami már nyilvánvalóan pozitív operátor. ■

8.38. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor, akkor a

$$|T| := (T^*T)^{1/2}$$

pozitív operátort a T *abszolútértékének* nevezzük.

8.39. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és T pozitív operátor, akkor $|T|$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(a) *minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra* $\||T|x\|^2 = \|Tx\|^2$,
(b) $\ker|T| = \ker T$ *és* $\operatorname{ran}|T| = \operatorname{ran} T^*$.

Bizonyítás. (a) Legyen $x \in \mathcal{H}$, akkor

$$\||T|x\|^2 = (|T|^2 x \,|\, x) = (T^*Tx \,|\, x) = \|Tx\|^2,$$

amivel (a)-t igazoltuk.

(b) A $\ker|T| = \ker T$ egyenlőség nyilvánvaló (a) alapján, a $\operatorname{ran}|T| = \operatorname{ran} T^*$ egyenlőség pedig szintén (a) alapján a 6.28 Douglas-féle faktorizációs tétel közvetlen következményeképp adódik. ■

8.40. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor és $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan operátor, hogy $AB = B^*A$. Akkor*

$$|(ABx \,|\, x)| \leq r(B) \cdot (Ax \,|\, x), \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $x \in \mathcal{H}$ vektort. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden n pozitív egész számra

$$|(ABx \,|\, x)| \leq (Ax \,|\, x)^{1-1/2^n} (AB^{2^n} x \,|\, x)^{1/2^n}. \tag{8.9}$$

Ehhez először vezessük be a

$$\langle u \,|\, v \rangle := (Au \,|\, v), \qquad u, v$$

félskalárszorzatot, akkor a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint $AB = B^*A$ felhasználásával

$$\begin{aligned}|(ABx\,|\,x)| &= |\langle Bx\,|\,x\rangle| \\ &\le \langle x\,|\,x\rangle^{1/2}\langle Bx\,|\,Bx\rangle^{1/2} \\ &= (Ax\,|\,x)^{1/2}(ABx\,|\,Bx)^{1/2} \\ &= (Ax\,|\,x)^{1/2}(AB^2x\,|\,x)^{1/2},\end{aligned}$$

amivel a (8.9) egyenlőtlenséget $n = 1$ esetben beláttuk. Tegyük fel ezután, hogy valamely n-re a (8.9) fennáll, akkor ismét a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján $AB^{2^n} = (B^{2^n})^*A$ figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(AB^{2^n}x\,|\,x) &= \langle B^{2^n}x\,|\,x\rangle \\ &\le \langle x\,|\,x\rangle^{1/2}\langle B^{2^n}x\,|\,B^{2^n}x\rangle^{1/2} \\ &= (Ax\,|\,x)^{1/2}(AB^{2^n}x\,|\,B^{2^n}x)^{1/2} \\ &= (Ax\,|\,x)^{1/2}(AB^{2^{n+1}}x\,|\,x)^{1/2},\end{aligned}$$

így a (8.9) indukciós hipotézis alapján

$$\begin{aligned}|(ABx\,|\,x)| &\le (Ax\,|\,x)^{1-1/2^n}\cdot[(Ax\,|\,x)^{1/2}(AB^{2^{n+1}}x\,|\,x)^{1/2}]^{1/2^n} \\ &= (Ax\,|\,x)^{1-1/2^{n+1}}\cdot(AB^{2^{n+1}}x\,|\,x)^{1/2^{n+1}},\end{aligned}$$

amivel az indukciós lépést és egyúttal minden n-re a (8.9) egyenlőtlenséget is beláttuk. Ezt a becsést alkalmazva kapjuk, hogy minden n-re

$$|(ABx\,|\,x)| \le (Ax\,|\,x)^{1-1/2^n}\cdot\|A\|^{1/2^n}\|B^{2^n}\|^{1/2^n}\|x\|^{1/2^{n-1}},$$

amiből $n \to \infty$ mellett $\|B^{2^n}\|^{1/2^n} \to r(B)$ figyelembevételével a bizonyítandó egyenlőtlenséget nyerjük. ■

8.41. Állítás. *Legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátorok, hogy $B \le A$, akkor egyúttal $B^{1/2} \le A^{1/2}$.*

Bizonyítás. Az $A \le B$ reláció szerint fennáll a

$$\|B^{1/2}x\|^2 \le \|A^{1/2}x\|^2, \qquad x \in \mathcal{H}$$

becslés, ezért a 6.28 Douglas faktorizációs tétel szerint létezik olyan $D \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $\|D\| \le 1$ operátor, hogy $A^{1/2}D = B^{1/2}$. A $B^{1/2}$ operátor önadjungáltsága miatt $A^{1/2}D = D^*A^{1/2}$, ezért az előző Lemma szerint

$$|(A^{1/2}Dx\,|\,x)| \le r(D)\cdot(A^{1/2}x\,|\,x), \qquad x \in \mathcal{H},$$

amiből $A^{1/2}D = B^{1/2}$ és $r(D) \le \|D\| \le 1$ figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(B^{1/2}x\,|\,x) \le (A^{1/2}x\,|\,x), \qquad x \in \mathcal{H},$$

azaz $B^{1/2} \le A^{1/2}$. ■

8.6. Parciális izometriák és a polár felbontás

8.42. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor egy $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort *parciális izometriának* nevezünk, ha V^*V ortogonális projekció.

8.43. Lemma. *Bármely* $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *folytonos lineáris operátor esetén* $\ker T = \ker T^*T$.

Bizonyítás. A $\ker T \subseteq \ker T^*T$ tartalmazás nyilvánvaló. Legyen $x \in \ker T^*T$, akkor

$$\|Tx\|^2 = (T^*Tx \,|\, x) = 0,$$

azaz $Tx = 0$. Következésképp $x \in \ker T$, amiből a $\ker T^*T \subseteq \ker T$ tartalmazás és egyúttal a Lemma állítása is következik. ■

8.44. Állítás. *Ha* $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *parciális izometria, akkor*

$$V^*V = P,$$

ahol P *a* $[\ker V]^\perp$ *altérre való ortogonális projekció.*

Bizonyítás. Jelölje $Q := V^*V$, akkor a 8.5 Következmény szerint a $Q = P$ egyenlőség egyenértékű a $\ker P = \ker Q$ egyenlőséggel. Másfelől az előző lemma szerint $\ker Q = \ker V$, illetve a 8.3 Állítás szerint $\ker P = [\ker V]^{\perp\perp} = \ker V$, amiből a bizonyítandó azonosság adódik. ■

8.45. Tétel. *Legyen* $\mathcal{H}$ *Hilbert-tér és legyen* $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. *A következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) V *parciális izometria,*
(ii) *minden* $x \in [\ker V]^\perp$ *vektorra* $\|Vx\| = \|x\|$,
(iii) $VV^*V = V$,
(iv) V^* *parciális izometria.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Legyen $x \in [\ker V]^\perp$, akkor $V^*Vx = x$, ui. V^*V megegyezik a $[\ker V]^\perp$ altérre való ortogonális projekcióval. Következésképp,

$$\|Vx\|^2 = (V^*Vx \,|\, x) = \|x\|^2.$$

(ii)⇒(i): Legyen $x \in \mathcal{H}$, akkor x előáll $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in [\ker V]^\perp$ és $x_2 \in \ker V$. Jelölje P a $[\ker V]^\perp$ altérre vett ortogonális projekciót, akkor egyrészt

$$(V^*Vx_1 \,|\, x_1) = \|Vx_1\|^2 = \|x_1\|^2 = (Px_1 \,|\, x_1),$$

illetve $Vx_1 = Vx$ és $Px = Px_1$, ezért

$$(V^*Vx \,|\, x) = (Vx_1 \,|\, Vx_1) = (Px_1 \,|\, x_1) = (Px \,|\, x),$$

amiből a V^*V és P operátorok önadjungáltsága folytán a $V^*V = P$ egyenlőség már következik.

(i)⇒(iii): Legyen $x \in \mathcal{H}$, akkor x előáll előáll $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in [\ker V]^\perp$ és $x_2 \in \ker V$. Következésképp $V^*Vx_1 = x_1$ és $Vx_2 = V^*Vx_2 = 0$, ezért

$$Vx = Vx_1 = VV^*Vx_1 = VV^*Vx,$$

vagyis valóban $V = VV^*V$.

(iii)⇒(iv): Azt kell igazolnunk, hogy VV^* ortogonális projekció, vagyis önadjungált és idempotens. Ez előbbi nyilvánvaló, másfelől (iii) szerint

$$VV^* = (VV^*V)V^* = (VV^*)^2$$

vagyis VV^* idempotens.

(iv)⇒(i): Ha V^* parciális izometria, akkor VV^* megegyezik a $[\ker V^*]^\perp = \overline{\operatorname{ran} V}$ altérre való ortogonális projekcióval, speciálisan minden x-re $VV^*Vx = Vx$, vagyis fennáll a $VV^*V = V$ egyenlőség. Ebből nyerjük, hogy

$$(V^*V)^2 = V^*(VV^*V) = V^*V,$$

vagyis V^*V ortogonális projekció. ■

Ahogy egy komplex számot elő tudunk állítani egy pozitív és egy egy-abszolút értékű (unitér) komplex szám szorzataként, úgy az alábbi tétel szerint bármely $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátor is előáll egy pozitív operátor és egy parciális izometria szorzataként:

8.46. A polárfelbontás tétele. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és legyen $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ egy folytonos lineáris operátor, akkor létezik egyetlen $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ parciális izometria, hogy* $\ker T = \ker V$ *és amely mellett T előáll*

$$T = V|T| \tag{8.10}$$

alakban.

Bizonyítás. Minthogy minden x-re $\||T|x\| = \|Tx\|$, azért az alábbi

$$V_0(|T|x) := Tx, \qquad x \in \mathcal{H},$$

$V_0 : \operatorname{ran}|T| \to \mathcal{H}$ leképezés jól definiált lineáris izometria. Jelölje továbbra is V_0 e leképezés $\overline{\operatorname{ran}|T|}$-re való egyértelmű folytonos és izometrikus kiterjesztését és legyen $x \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges vektor. Ekkor x egyértelműen előáll $x = x_0 + x_1$ alakban, ahol $x_0 \in [\ker T]^\perp$ és $x_1 \in \ker T$, így

$$\overline{\operatorname{ran}|T|} = [\ker|T|]^\perp = [\ker T]^\perp$$

figyelembevételével $x_0 \in \overline{\operatorname{ran}|T|}$. Vezessük be a $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ leképezést a

$$Vx := V_0x_0, \qquad x \in \mathcal{H}$$

hozzárendeléssel, akkor V lineáris és

$$\|Vx\|^2 = \|V_0x_0\|^2 = \|x_0\|^2 \leq \|x\|^2, \qquad x \in \mathcal{H}$$

figyelembevételével V folytonos. A konstrukció szerint az is világos, hogy $\ker V = \ker T$, illetve emiatt $[\ker V]^\perp = [\ker T]$, ezért bármely $x_0 \in [\ker V]^\perp$ vektorra

$$\|Vx_0\| = \|V_0x_0\| = \|x_0\|,$$

amiből a 8.45 Tétel szerint következik, hogy V parciális izometria. Végezetül ha $x \in \mathcal{H}$, akkor

$$V|T|x = V_0|T|x = Tx,$$

vagyis V eleget tesz a (8.10) egyenlőségnek.

Az egyértelműség igazolásához tegyük fel, hogy V_1 és V_2 olyan parciális izometriák, hogy $\ker V_1 = \ker V_2 = \ker T$ és $V_1|T| = V_2|T| = T$, akkor a folytonosság miatt V_1 és V_2

megegyeznek a $\overline{\operatorname{ran}|T|} = [\ker T]^\perp$ altéren, ezért $\mathcal{H} = \ker T + [\ker T]^\perp$ figyelembevételével kapjuk, hogy $V_1 = V_2$. ■

8.47. Definíció. Legyen $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor és $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan parciális izometria, amely eleget tesz az előző tétel feltételeinek, akkor a T operátor $T = V|T|$ előállítását a T polárfelbontásának nevezzük.

8.48. Állítás. *Legyen $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ és legyen V a T polárfelbontásában szereplő parciális izometria, akkor fennállnak a következők:*

(a) $|T| = V^*T$,
(b) $\operatorname{ran} V = [\ker T^*]^\perp$.

Bizonyítás. (a) A feltétel szerint $\ker V = \ker T$, ezért V^*V megegyezik a $[\ker T]^\perp$ altérre való ortogonális projekcióval. Másfelől $\overline{\operatorname{ran}|T|} = [\ker T]^\perp$ figyelembevételével $V^*V|T|x = |T|x$, $x \in \mathcal{H}$, következésképp

$$|T| = V^*V|T| = V^*T.$$

(b) Nyilvánvaló a V operátor konstrukciójából. ■

A polárfelbontás egy egyszerű, de meglepő következménye az alábbi:

8.49. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor bármely $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ ideál *-ideál, vagyis tetszőleges $A \in \mathscr{I}$ esetén $A^* \in \mathscr{I}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ ideál, és legyen $A \in \mathscr{I}$. A polárfelbontás tétele szerint létezik olyan $V \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ parciális izometria, amelyre $A = V|A|$ és $|A| = V^*A$. Ekkor $A \in \mathscr{I}$ miatt $|A| \in \mathscr{I}$, így $A^* = |A|V^* \in \mathscr{I}$, vagyis $\mathscr{I}$ *-ideál. ■

8.7. Rendezés az önadjungált operátorok körében

Az alábbiakban jelölje $\mathscr{B}_{sa}(\mathcal{H})$ egy adott $\mathcal{H}$ Hilbert-tér feletti önadjungált operátorok halmazát. A korábbiakban láttuk, hogy $\mathscr{B}_{sa}(\mathcal{H})$ felett a „$\leq$” reláció rendezés, ahol $A \leq B$ azt jelenti, hogy

$$(Ax \,|\, x) \leq (Bx \,|\, x), \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Elsőként e rendezés ortogonális projekciók halmazára vett megszorításával foglalkozunk.

8.50. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $P, Q \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ ortogonális projekciók. Az alábbi kijelentések egyenértékűek:*

(i) $P \leq Q$,
(ii) $\ker Q \subseteq \ker P$,
(iii) $\operatorname{ran} P \subseteq \operatorname{ran} Q$,
(iv) $PQ = QP = P$,
(v) $Q - P$ *ortogonális projekció.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Ha $P \leq Q$, akkor minden x-re $\|Px\|^2 \leq \|Qx\|^2$, amiből nyilvánvalóan következik a $\ker Q \subseteq \ker P$.

(ii)⇒(iii): Tegyük fel, hogy $\ker Q \subseteq \ker P$, akkor

$$\operatorname{ran} P = [\ker P]^\perp \subseteq [\ker Q]^\perp = \operatorname{ran} Q.$$

(iii)⇒(iv) Tegyük fel, hogy a (iii) tartalmazás fennáll, akkor minden x-re $Px \in \operatorname{ran} Q$, ezért

$$QPx = Px, \qquad x \in \mathcal{H},$$

vagyis $QP = P$, ahonnét adjungálással a $P = P^* = PQ$ összefüggés adódik.

(iv)⇒(v): Tegyük fel, hogy (iv) teljesül, akkor

$$(Q - P)^2 = Q^2 - QP - PQ + P^2 = Q - 2P + P = Q - P,$$

vagyis $(Q - P)^2 = Q - P$. Másfelől $Q - P$ nyilvánvalóan önadjungált, következésképp ortogonális projekció.

(v)⇒(i): Ez az implikáció triviális, ui. minden ortogonális projekció pozitív operátor. ■

Emlékeztetünk arra, hogy egy $(\mathscr{L}, \leq)$ rendezett halmazt hálónak nevezünk, ha bármely $u, v \in \mathscr{L}$ elemeknek létezik a legkisebb felső, és legnagyobb alsókorlátja, melyeket rendre az $u \vee v$, illetve $u \wedge v \in \mathscr{L}$ szimbólumokkal jelölünk.

Tehát $u \vee v$ (amennyiben létezik) rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $u, v \leq u \vee v$, ha továbbá $w \in \mathscr{L}$ tetszőleges olyan elem, hogy $u, v \leq w$, akkor egyúttal $u \vee v \leq w$. Hasonlóképp, $u \wedge v \leq u, v$, ha továbbá $w \in \mathscr{L}$ tetszőleges olyan elem, hogy $w \leq u, v$, akkor egyúttal $w \leq u \wedge v$.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy tetszőleges $\mathcal{H}$ Hilbert-tér esetén a projektorok halmaza háló:

8.51. Tétel. *Ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor az ortogonális projekciók* $\mathrm{P}(\mathcal{H})$ *halmaza a $\leq$ rendezéssel háló.*

Bizonyítás. Legyenek $P_1, P_2 \in \mathrm{P}(\mathcal{H})$ ortogonális projekciók és jelölje M_1, M_2 ezek képtereit és jelölje P az $M_1 \cap M_2$ altérre vett ortogonális projekciót. Akkor tehát $\operatorname{ran} P \subseteq M_j$, $j = 1, 2$, ezért a 8.50 Állítás szerint $P \leq P_j$, $j = 1, 2$. Ha pedig $P' \in \mathrm{P}(\mathcal{H})$ olyan, hogy $P' \leq P_1, P_2$, akkor ismét 8.50 Állítás szerint $\operatorname{ran} P' \subseteq M_j$, $j = 1, 2$, vagyis $\operatorname{ran} P' \subseteq M_1 \cap M_2$ és ezért $P' \leq P$. Ezzel megmutattuk, hogy P a P_1 és P_2 projekciók legnagyobb alsó korlátja $\mathrm{P}(\mathcal{H})$-ban, vagyis $P = P_1 \wedge P_2$.

Legyen most Q az $M := \overline{M_1 + M_2}$ altérre vett ortogonális projekció (vigyázzunk arra, hogy az $M_1 + M_2$ Minkowski-összeg nem feltétlenül zárt), akkor $M_j \subseteq M$ miatt $P_j \leq Q$, $j = 1, 2$. Legyen továbbá $Q' \in \mathrm{P}(\mathcal{H})$ olyan, hogy $P_j \leq Q'$, $j = 1, 2$, és jelölje $M' := \operatorname{ran} Q'$, akkor $M_j \subseteq M'$ miatt $M_1 + M_2 \subseteq M'$, és mivel M' zárt, azért az $M \subseteq M'$ tartalmazás is fennáll, amiből a 8.50 Állítás alapján nyerjük, hogy $Q \leq Q'$. Ezzel megmutattuk, hogy Q a P_1 és P_2 projekciók legkisebb felső korlátja $\mathrm{P}(\mathcal{H})$-ban, vagyis $Q = P_1 \vee P_2$. ■

A fenti bizonyításból kiderült, hogy bármely $P_1, P_2 \in \mathrm{P}(\mathcal{H})$ ortogonális projekciók $\mathrm{P}(\mathcal{H})$-beli legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja létezik, éspedig $N := M_1 \cap M_2$ és $M := \overline{M_1 + M_2}$ jelölésekkel

$$P_1 \wedge P_2 = P_N, \qquad P_1 \vee P_2 = P_M.$$

Vigyázzunk azonban arra, hogy P_N csupán az ortogonális projekciók között a legnagyobb alsó korlátja a P_1 és P_2 operátoroknak. Létezhet ui. olyan A önadjungált elem (de nem projekció), amelyre $A \leq P_1, P_2$ teljesül, de A és P_N nem összehasonlítható.

Az alábbiakban bebizonyítjuk R. Kadison nevezetes eredményét, miszerint egy Hilbert-tér önadjungált operátorainak $\mathscr{B}_{sa}(\mathcal{H})$ halmaza *anti-háló*, ami azt jelenti, hogy két önadjungált operátor infimuma (illetve supremuma) pontosan akkor létezik, ha azok összehasonlíthatók.

Ehhez elsőként igazoljuk az alábbi segédállítást:

8.52. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek P_1 és P_2 olyan ortogonális projekciók, amelyek $P_1 \wedge P_2$ infimuma létezik a $(\mathscr{B}_{sa}(\mathcal{H}), \leq)$ részben rendezett halmazban. Ha $P_1 \wedge P_2 = 0$, akkor $P_1 = 0$ vagy $P_2 = 0$.*

Bizonyítás. Elsőként azt a gyengébb állítást igazoljuk, hogy a Lemma feltételei mellett P_1 és P_2 képterei egymásra merőlegesek. Jelölje Q a $\operatorname{ran} P_1 + \operatorname{ran} P_2$ Minkowski-összeg lezárására való ortogonális projekciót, akkor világos, hogy $P_1, P_2 \leq Q$. Speciálisan $P_3 \coloneqq Q - P_1$ szintén ortogonális projekció, továbbá a $P_2 - P_3$ önadjungált operátorra fennáll, hogy $P_2 - P_3 \leq P_2$, illetve

$$P_2 - P_3 \leq Q - P_3 = P_1,$$

ezért $P_1 \wedge P_2 = 0$ folytán $P_2 - P_3 \leq 0$, vagyis $P_2 \leq P_3$. Mivel $P_1 P_3 = P_1(Q - P_1) = 0$, azért P_1 és P_3 képterei egymásra merőlegesek, és mivel $P_2 \leq P_3$, azért P_2 és P_1 képterei is merőlegesek egymásra.

Tegyük fel ezután indirekt módon, hogy a P_1 és P_2 projekciók egyike sem 0, és válasszunk azok képtereiből e_1 és e_2 egy-normájú vektorokat. A bizonyítás első fele alapján e_1 és e_2 egymásra merőleges vektorok. Vezessük be az alábbi

$$T = e_1 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 2e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$$

egyenlőséggel értelmezett $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort, ahol $u, v \in \mathcal{H}$ vektorok esetén az $u \otimes v$ operátort az

$$(u \otimes v)(x) \coloneqq (x \,|\, v)u, \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel definiáljuk. Az $(u \otimes v)^* = v \otimes u$ egyenlőségből világos, hogy T önadjungált operátor, azaz $T \in \mathscr{B}_{sa}(\mathcal{H})$. Az $e_j \otimes e_j \leq P_j$, $(j = 1, 2)$ és

$$T + 3e_1 \otimes e_1 = (2e_1 + e_2) \otimes (2e_1 + e_2),$$
$$T + 3e_2 \otimes e_2 = (e_1 + 2e_2) \otimes (e_1 + 2e_2)$$

összefüggésekből világos, hogy $T + 3P_j \geq 0$, vagyis $-\frac{1}{3}T \leq P_j$, $(j = 1, 2)$, azért $P_2 \wedge P_1$ figyelembevételével kapjuk, hogy $-\frac{1}{3}T \leq 0$, következésképp $T \geq 0$. Ugyanakkor egyszerű számolás mutatja, hogy

$$T(e_1 - e_2) = -(e_1 - e_2),$$

amiből látható, hogy T nem lehet pozitív operátor, tehát az indirekt feltevésünkből ellentmondásra jutottunk. ∎

8.53. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $A, B \in \mathscr{B}_{sa}(\mathcal{H})$ önadjungált operátorok. Az A és B operátorok $A \wedge B$ infimuma pontosan akkor létezik a $(\mathscr{B}_{sa}(\mathcal{H}), \leq)$ részben rendezett halmazban, ha A és B összehasonlítható, azaz $A \leq B$ vagy $B \leq A$.*

Bizonyítás. Ha az A és B operátorok összehasonlíthatók, akkor azok infimuma triviális módon létezik. Tegyük fel tehát megfordítva, hogy az $A \wedge B$ infimum létezik. Vezessük be az $A' \coloneqq A - A \wedge B$ és $B' \coloneqq B - A \wedge B$ nyilvánvalóan pozitív operátorokat, akkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy azok $A' \wedge B'$ infimuma is létezik és $A' \wedge B' = 0$. A Tétel igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy A' és B' valamelyike a 0 operátor. Tegyük fel, hogy nem így van, vagyis léteznek $e \in \operatorname{ran} A'$ és $f \in \operatorname{ran} B'$ nem-nulla vektorok. Jelölje P, illetve Q az e, illetve f vektorok által kifeszített egy-dimenziós alterekre való ortogonális projekciókat, akkor a 6.28 Douglas-féle faktorizációs tétel miatt létezik olyan α pozitív szám, hogy $P \leq \alpha A'$ és $Q \leq \alpha B'$, következésképp $\delta = 1/\alpha$ választással $\delta P \leq A'$ és $\delta Q \leq B'$. Ebből és az $A' \wedge B' = 0$ összefüggésből egyszerűen adódik, hogy a $P \wedge Q$ infimum is létezik és $P \wedge Q = 0$. Az előző lemma szerint ekkor $P = 0$ vagy $Q = 0$ teljesül, amivel ellentmondásra jutottunk. ■

9. FEJEZET

Kompakt operátorok

9.1. Kompakt operátorok elemi tulajdonságai

Az alábbiakban megegyezünk abban, hogy az egyszerűség kedvéért egy E Banach-tér 0 közepű zárt egységgömbjét B-vel, vagy B_E-vel jelöljük.

9.1. Definíció. Legyenek E és F Banach-terek, akkor egy $T : E \to F$ lineáris operátort *kompakt operátornak* nevezünk, ha az E-beli zárt egységgömb T szerinti képe prekompakt F-ben, vagyis a

$$\overline{T\langle B_E\rangle} \subseteq F$$

halmaz kompakt.

A továbbiakban $\mathscr{K}(E; F)$ jelöli a $T : E \to F$ kompakt operátorok halmazát, illetve $E = F$ esetben a rövidebb $\mathscr{K}(E) := \mathscr{K}(E; F)$ jelölést alkalmazzuk.

Emlékeztetünk arra, hogy egy (X, d) metrikus tér egy K részhalmazát *teljesen korlátosnak* nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik véges sok $x_1, \dots, x_n$ X-beli pont, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_j).$$

Az alábbiakban gyakran felhasználjuk a következő jól ismert állítást, amely a kompakt és a teljesen korlátos halmazok kapcsolatát írja le teljes metrikus terekben:

9.2. Állítás. *Teljes metrikus tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha teljesen korlátos és zárt.*

Emlékeztetünk továbbá arra is, hogy metrikus tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha sorozatkompakt. Ezek figyelembevételével nyilvánvaló az alábbi állítás:

9.3. Állítás. *Legyenek E és F Banach-terek, illetve legyen $T : E \to F$ egy lineáris operátor. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

(i) *T kompakt operátor,*
(ii) *bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható véges sok $y_1, \dots, y_m \in F$ vektor, hogy minden $x \in B_E$ esetén $\|Tx - y_j\| < \varepsilon$ teljesül valamely $j = 1, \dots, m$ indexre,*
(iii) *bármely $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos E-beli sorozatból kiválasztható olyan $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat, hogy $(Tx_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens.*

A fenti állításnak megfelelően szokás a kompakt operátorokat teljesen korlátos operátoroknak is nevezni. Fontos azonban megjegyezni, hogy az állításban szereplő (i)$\Leftrightarrow$(ii) ekvivalencia csak akkor igaz, ha F Banach-tér.

Az alábbiakban megvizsgáljuk a kompakt operátorok legfontosabb elemi tulajdonságait:

9.4. Állítás. *Minden kompakt operátor folytonos.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló abból, hogy minden kompakt halmaz korlátos és hogy egy lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha a zárt egységgömböt korlátos halmazba képezi. ∎

9.5. Állítás. *Legyen E Banach-tér, ekkor $\mathscr{K}(E)$ zárt lineáris altér $\mathscr{B}(E)$-ben az operátornormára nézve. Ha $T \in \mathscr{K}(E)$ és $A \in \mathscr{B}(E)$, akkor $AT \in \mathscr{K}(E)$, illetve $TA \in \mathscr{K}(E)$.*

Bizonyítás. Jelölje B az E Banach-tér zárt egységgömbjét. Megmutatjuk először, hogy $S, T \in \mathscr{K}(E)$ esetén $S + T \in \mathscr{K}(E)$, ami a fentiek figyelembevételével azzal ekvivalens, hogy az $(S+T)\langle B\rangle \subseteq E$ halmaz teljesen korlátos. Legyen $\varepsilon > 0$ és az S, illetve T kompakt operátorokhoz válasszunk olyan $y_1, \dots, y_n$ és $z_1, \dots, z_m$ E-beli vektorokat, hogy

$$S\langle B\rangle \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_k), \qquad T\langle B\rangle \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_j),$$

akkor bármely $x \in B$ esetén léteznek olyan k, j indexek, hogy $\|Sx - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|Tx - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$\|(S+T)x - (y_k + z_j)\| \leq \|Sx - y_k\| + \|Tx - z_j\| < \varepsilon,$$

vagyis a $H \coloneqq \{y_k + z_j \,|\, k = 1, \dots, n \text{ és } j = 1, \dots, m\}$ olyan E-beli véges halmaz, amelyre

$$(S+T)\langle B\rangle \subseteq \bigcup_{y \in H} B_{\varepsilon}(y),$$

amivel megmutattuk, hogy $(S+T)\langle B\rangle$ teljesen korlátos halmaz, vagyis $S + T$ kompakt operátor. Hasonlóan igazolható, hogy kompakt operátor bármely skalárszorosa is kompakt operátor, ami azt jelenti, hogy $\mathscr{K}(E)$ lineáris altere a $\mathscr{B}(E)$ operátor algebrának.

Megmutatjuk, hogy $\mathscr{K}(E)$ zárt részhalmaza $\mathscr{B}(E)$-nek. Legyen ugyanis $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{K}(E)$-ben haladó sorozat, amely operátor norma szerint konvergál valamely $T \in \mathscr{B}(E)$ folytonos lineáris operátorhoz, azaz $\|T_n - T\| \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor a feltétel szerint létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ index, amelyre $\|T - T_N\| < \frac{\varepsilon}{2}$, és $T_N \in \mathscr{K}(E)$ miatt létezik $z_1, \dots, z_m$ véges sok E-beli vektor, amelyre

$$T_N\langle B\rangle \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_j),$$

de akkor bármely $x \in B$ vektorhoz létezik olyan $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$ hogy $\|T_N x - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$\|Tx - z_j\| \leq \|Tx - T_N x\| + \|T_N x - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből kapjuk, hogy $Tx \in B_{\varepsilon}(z_j)$, következésképp

$$T\langle B\rangle \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon}(z_j),$$

vagyis $T \in \mathscr{K}(E)$.

Legyenek végül $A \in \mathscr{B}(E)$ és $T \in \mathscr{K}(E)$, és jelölje K a $T\langle B\rangle$ halmaz E-beli lezártját. Ekkor a feltétel szerint K kompakt, ezért az A operátor folytonossága miatt $A\langle K\rangle \subseteq F$ halmaz is kompakt. Továbbá nyilvánvaló, hogy $(AT)\langle B\rangle \subseteq A\langle K\rangle$, amiből már látható, hogy az AT szorzatoperátor kompakt. Másfelől az $A \in \mathscr{B}(E)$ operátor folytonossága miatt létezik olyan $r > 0$, amelyre $A\langle B\rangle \subseteq rB$, ezért

$$(TA)\langle B\rangle \subseteq T\langle rB\rangle = rT\langle B\rangle,$$

ahol a jobboldalon álló halmaz nyilvánvalóan prekompakt, amiből látható, hogy a TA szorzatoperátor is kompakt. ■

9.6. Következmény. *Ha E Banach-tér, akkor $\mathscr{K}(E)$ zárt ideál a $\mathscr{B}(E)$ Banach-algebrában.*

Nyilvánvaló, hogy az azonosan nulla-operátor kompakt operátor, azonban látni fogjuk, hogy ha E nem véges dimenziós, akkor az identikus operátor nem kompakt. Felmerül tehát a kérdés, hogy általában milyen elemei vannak a $\mathscr{K}(E)$ operátorhalmaznak.

9.7. Állítás. *Legyen E Banach-tér és $T \in \mathscr{B}(E)$.*

(a) *Ha T képtere véges dimenziós, akkor T kompakt operátor.*
(b) *Ha létezik olyan $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{B}(E)$-ben haladó operátorsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén T_n véges dimenziós képterű és $T_n \to T$ az operátornorma szerint, akkor T kompakt operátor.*

Bizonyítás. (a) Ha $T \in \mathscr{B}(E; F)$, akkor $r := \|T\|$ választással

$$T\langle B\rangle \subseteq rB \cap \operatorname{ran} T.$$

Mivel $\operatorname{ran} T$ véges dimenziós altere E-nek, azért a fenti tartlamazás jobb oldalán álló korlátos és zárt halmaz kompakt a $\operatorname{ran} T$ véges dimenziós normált térben, és emiatt kompakt az E Banach-térben is, vagyis a $T\langle B\rangle$ halmaz prekompakt halmaz E-ben, amiből következik, hogy T kompakt operátor.

(b) Nyilvánvaló az (a) pont és a 9.5 Állítás alapján. ■

Vigyázzunk arra, hogy létezhet E felett olyan lineáris operátor, amely ugyan véges dimenziós képterű, de nem folytonos (például egy nem folytonos lineáris funkcionál ilyen). Természetesen egy ilyen operátor nem lehet kompakt. A véges dimenziós képterű folytonos lineáris operátorokat *véges rangú operátoroknak* nevezzük, és az E és F Banach-terek közt ható véges rangú operátorok halmazára a $\mathscr{B}_{00}(E; F)$ jelölést alkalmazzuk. Könnyen igazolható, hogy $\mathscr{B}_{00}(E; F)$ lineáris altere $\mathscr{B}(E; F)$-nek, azonban ez az altér általában nem zárt az operátornormára nézve.

A fentiek szerint minden olyan $\mathscr{B}(E)$-beli operátor kompakt, amely approximálható véges rangú operátorokkal. Sokáig megoldatlan probléma volt, hogy igaz-e ennek a megfordítása, vagyis tetszőleges kompakt operátor előáll-e úgy, mint véges dimenziós képterű operátorok operátornorma szerinti limesze. A válasz erre a kérdésre ilyen általánosságban nemleges. Látni fogjuk azonban, hogy ha $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor $\mathscr{K}(\mathcal{H})$ elemeire érvényes lesz ez a megfordítás (9.10 Állítás).

9.2. Kompakt operátorok Hilbert-téren

A Hilbert-terek közt ható kompakt operátoroknak a következő jellemzése adható:

9.8. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-tér, és $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$. Ekkor az alábbi kijelentések egyenértékűek:*

(i) *T kompakt operátor, vagyis $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$;*

(ii) *Minden $\mathcal{H}$-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gyenge nullsorozatra $\|Tx_n\| \to 0$ teljesül.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Tegyük fel először, hogy T kompakt operátor és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy gyenge null-sorozat $\mathcal{H}$-ban. A Banach–Steinhaus tétel szerint $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normában korlátos, ezért a T operátor kompaktsága miatt létezik olyan $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, és létezik olyan $z \in \mathcal{K}$ vektor, hogy $Tx_{n_k} \to z$ normában. Másfelől $x_{n_k} \to 0$ gyengén, így bármely $y \in \mathcal{K}$ vektorra

$$(Tx_{n_k} \,|\, y) = (x_{n_k} \,|\, T^*y) \to 0,$$

amiből következik, hogy $z = 0$, vagyis $\|Tx_{n_k}\| \to 0$. Ezzel megmutattuk, hogy bármely $\mathcal{H}$-beli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gyenge null-sorozatnak létezik $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amelyre $Tx_{n_k} \to 0$, amiből már egyszerű megfontolással adódik, hogy $Tx_n \to 0$.

(ii)⇒(i): Tegyük fel, hogy $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ eleget tesz a (ii) feltételnek és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy korlátos $\mathcal{H}$-beli sorozat. A 3.49 Tétel szerint létezik olyan $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $x \in \mathcal{H}$ vektor, hogy $x_{n_k} \to x$ gyengén $\mathcal{H}$-ban, vagy ami ugyanaz, $x_{n_k} - x \to 0$ gyengén. Akkor (ii) szerint $T(x_{n_k} - x) \to 0$, azaz $Tx_{n_k} \to Tx$, amivel megmutattuk, hogy a T operátor kompakt. ■

A kompaktság fenti jellemzéséből egyszerűan adódik Schauder tételének Hilbert-terekre vonatkozó alábbi változata:

9.9. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-tér, ekkor egy $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ operátorra ekvivalensek:*

(i) *T kompakt, vagyis $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H};\mathcal{K})$;*
(ii) *T^*T kompakt, vagyis $T^*T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$;*
(iii) *TT^* kompakt, vagyis $TT^* \in \mathscr{K}(\mathcal{K})$;*
(iv) *T^* kompakt, vagyis $T^* \in \mathscr{K}(\mathcal{K};\mathcal{H})$.*

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy az (i) és (ii) állítások ekvivalensek. Ebből az (i)⇒(ii) implikáció nyilvánvaló. Megfordítva tegyük fel, hogy T^*T kompakt és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathcal{H}$-beli sorozat, amely gyengén konvergál a nullához. A Banach–Steinhaus-tétel értelmében $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos, és az előző tétel szerint $\|T^*Tx_n\| \to 0$. Ebből kapjuk, hogy

$$\|Tx_n\|^2 = (T^*Tx_n \,|\, x_n) \le \|T^*Tx_n\|\|x_n\| \to 0,$$

vagyis T kompakt az előző tétel szerint. Az (i)⇒(iii) és (iv)⇒(ii) implikációk nyilvánvalóak. Végezetül az (i) és (ii) kijelentések ekvivalenciáját T helyett a T^* operátorra alkalmazva kapjuk, hogy a (iii) és (iv) állítások is egyenértékűek. ■

Az előző fejezet 9.7 Állításában láttuk, hogy minden olyan operátor kompakt, amelyik az operátornorma szerint approximálható véges rangú operátorokkal. Általában ennek a meg fordítása nem igaz. Igaz azonban Hilbert-terek közti kompakt operátorokra:

9.10. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-tér, és legyen $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ kompakt operátor. Ekkor létezik olyan $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$-ban haladó operátor sorozat, hogy $\|T_n - T\| \to 0$ és minden n-re T_n véges rangú operátor.*

Bizonyítás. Jelölje a fentiekhez hasonlóan B a $\mathcal{H}$-beli zárt egységgömböt. A feltétel szerint T kompakt operátor, ezért a $T\langle B\rangle$ halmaz teljesen korlátos $\mathcal{K}$-ban, tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$

rögzített számhoz létezik $F \subseteq B$ véges halmaz, hogy

$$T\langle B\rangle \subseteq \bigcup_{x\in F} B_\varepsilon(Tx).$$

Jelölje H_ε az F halmaz által generált véges dimenziós (következésképp zárt) lineáris alteret, és jelölje P_ε a H_ε altérre való ortogonális projekciót. Ekkor $P_\varepsilon T \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ nyilvánvalóan véges rangú operátor, ha továbbá $h \in B_1(0)$, akkor létezik olyan $x \in F$, hogy $Th \in B_\varepsilon(Tx)$, vagyis $\|Th - Tx\| < \varepsilon$, ezért

$$\|Th - P_\varepsilon Th\| = d_{H_\varepsilon}(Th) = \inf_{y\in H_\varepsilon} \|Th - y\| \leq \|Th - Tx\| < \varepsilon,$$

következésképp $\|T - P_\varepsilon T\| \leq \varepsilon$. ■

9.11. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat $\mathcal{H}$-ban, és $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{K}$-beli sorozat, amelyre $\lambda_n \to 0$. Értelmezzük a T operátort a*

$$Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x\,|\,e_n)e_n, \qquad x \in \mathcal{H}, \tag{9.1}$$

hozzárendeléssel. Ekkor T kompakt normális operátor.

Bizonyítás. Korábban igazoltuk, hogy a (9.1) formulával definiált operátorok normálisak. A T kompaktságának igazolásához értelmezzük tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ szám mellett a T_n véges rangú (speciálisan kompakt) operátort a következőképp:

$$T_n x := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x\,|\,e_k)e_k, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Ekkor minden $x \in \mathcal{H}$ mellett

$$(T - T_n)x := \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k(x\,|\,e_k)e_k$$

teljesül, speciálisan $\|T - T_n\| \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N},k\geq n+1} |\lambda_k| \to 0$. Vagyis T egyenlő a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt operátorokból álló sorozat operátornorma szerinti limeszével, így maga is kompakt. ■

Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat $\mathcal{H}$-ban, legyen továbbá $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy korlátos $\mathbb{K}$-beli sorozat. Értelmezzük a T operátort operátort az (9.1) formulával. Könnyen látható, hogy minden n természetes szám mellett fennáll a

$$Te_n = \lambda_n e_n$$

egyenlőség. Másszóval, minden n-re λ_n a T operátor sajátértéke, éspedig e_n sajátvektorral. Nem nehéz azonban példát adni olyan normális operátorra, amelynek egyetlen sajátértéke sincsen. Speciálisan, végtelen dimenziós (komplex) Hilbert-téren nem állítható elő minden normális operátor a (9.1) „diagonalizált” alakban. Az alábbiakban bizonyításra kerülő Hilbert-Schmidt tétel lényege ugyanakkor éppen az, hogy minden *kompakt normális* operátor a (9.1) kanonikus alakra hozható.

9.12. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ normális operátor, $\lambda \in \mathbb{C}$ és $x \in \mathcal{H}$. A $Tx = \lambda x$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $T^*x = \overline{\lambda}x$.*

Bizonyítás. A T operátorral együtt a $T-\lambda I$ operátor is normális, következésképp kapjuk, hogy

$$\ker(T-\lambda I)=\ker(T-\lambda I)^*=\ker(T^*-\overline{\lambda}I),$$

ami éppen a kívánt ekvivalenciát adja. ■

9.13. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $T\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$ normális operátor. Ha λ és μ a T különböző sajátértékei, akkor a T λ-hoz, illetve μ-hoz tartozó sajátvektorai egymásra merőlegesek.*

Bizonyítás. Legyenek $x,y\in\mathcal{H}$ olyan nem nulla vektorok, hogy $Tx=\lambda x$ és $Ty=\mu y$. Ekkor a 9.12 Lemma alapján $\overline{\mu}$ a T^* operátor sajátértéke y sajátvektorral, azért

$$\lambda(x\,|\,y)=(Tx\,|\,y)=(x\,|\,T^*y)=(x\,|\,\overline{\mu}y)=\mu(x\,|\,y),$$

következésképp $(x\,|\,y)=0$, vagyis az x és y sajátvektorok egymásra merőlegesek. ■

9.14. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, illetve $T\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$ normális operátor. Tegyük fel, hogy λ a T sajátértéke $e\in\mathcal{H}$, $\|e\|=1$ sajátvektorral. Ekkor a $H:=e^\perp$ altér zárt invariáns altere a T, illetve T^* operátoroknak. Ha továbbá T_0 jelöli a T H-ra vett megszorítását, akkor T_0 is normális operátor a H Hilbert-térben, és $T_0^*=T^*|_H$. Ha P jelöli a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér H-ra vett ortogonális projekcióját, akkor minden $x\in\mathcal{H}$ mellett Tx előáll az alábbi alakban:*

$$Tx=\lambda(x\,|\,e)e+T_0Px$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy H T-invariáns altere $\mathcal{H}$-nak. Legyen ugyanis $x\in H$, ekkor a $Te=\lambda e$ feltétel miatt és a 9.12 Lemma alapján

$$(Tx\,|\,e)=(x\,|\,T^*e)=(x\,|\,\overline{\lambda}e)=0,$$

ami azt jelenti, hogy $Tx\in H$. A H altér T^*-invarianciája hasonlóan adódik:

$$(T^*x\,|\,e)=(x\,|\,Te)=(x\,|\,\lambda e)=0,$$

vagyis $T^*x\in H$. A fentiek szerint tehát $T_0:H\to H$ nyilvánvalóan folytonos operátor, melyre $x,y\in H$ esetén fennáll, hogy

$$(T_0x\,|\,y)=(Tx\,|\,y)=(x\,|\,T^*y),$$

így $T^*y\in H$ miatt $T_0^*y=T^*y$ teljesül. Ebből pedig a $T_0\in\mathscr{B}(H)$ operátor normalitása már nyilvánvalóan következik. Jelölje végül P a H zárt altérre való ortogonális projekciót és legyen $x\in\mathcal{H}$, akkor $I-P$ a $\mathbb{K}.e$ egydimenziós altérre való vetítés, ezért $(I-P)x=(x\,|\,e)e$, amiből

$$Tx=T(I-P)x+TPx=T(x\,|\,e)e+T_0Px=\lambda(x\,|\,e)e+T_0Px,$$

amivel a bizonyítás kész. ■

Az alábbi segédtételt felhasználjuk a kompakt normális operátorok Hilbert–Schmidt féle alaptételének bizonyításában:

9.15. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér és $T\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$ kompakt normális operátor, akkor létezik T-nek olyan $\lambda\in\mathbb{C}$ sajátértéke, amelyre $|\lambda|=\|T\|$.*

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy létezik olyan $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = \|T\|$ szám és olyan $y \in \mathcal{H}$, $y \neq 0$ vektor, amelyre

$$Ty = \lambda y. \tag{9.2}$$

A feltétel szerint a T operátor normális, azért a 3.68 Tétel szerint T numerikus sugarára fennáll a $w(T) = \|T\|$ egyenlőség, vagyis létezik olyan $\mathcal{H}$-beli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa egy-normájú vektorokból álló sorozat, hogy

$$|(Tx_n \mid x_n)| \to \|T\|.$$

Alkalmas részsorozatra való áttérés után feltehető, hogy $(Tx_n \mid x_n) \to \lambda$ valamely $\lambda \in \mathbb{C}$ számra, ekkor szükségképp $|\lambda| = \|T\|$. A T operátor kompaktságát kihasználva, újabb részsorozatra való áttérés után pedig azt is feltehetjük, hogy $Tx_n \to y$ teljesül valamely $y \in \mathcal{H}$ vektorra. Ekkor

$$0 \leq \|Tx_n - (Tx_n \mid x_n)x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - |(Tx_n \mid x_n)|^2 \leq \|T\|^2 - |(Tx_n \mid x_n)|^2 \to 0,$$

amiből kapjuk, hogy

$$(Tx_n \mid x_n)x_n \to y. \tag{9.3}$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} |(Tx_n \mid x_n)| = \|T\|,$$

vagyis y nem nulla vektor, feltéve hogy T nem a nulla operátor (ez esetben a lemma állítása triviális). Továbbá T folytonosságából (9.3) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$T(Tx_n \mid x_n)x_n \to Ty,$$

másfelől a $(Tx_n \mid x_n) \to \lambda$ és $Tx_n \to y$ konvergenciák figyelembevételével

$$T(Tx_n \mid x_n)x_n = (Tx_n \mid x_n)Tx_n \to \lambda y,$$

amiből a $Ty = \lambda y$ egyenlőség adódik. Ezzel megmutattuk, hogy λ a T olyan sajátértéke, amelyre $|\lambda| = \|T\|$. ■

Az alábbiakban bebizonyítjuk a kompakt normális operátorok alaptételét:

9.16. Hilbert–Schmidt-tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ végtelen dimenziós komplex Hilbert-tér, és legyen $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ kompakt normális operátor. Ekkor létezik a T sajátvektoraiból álló olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{H}$-ban haladó ortonormált sorozat és a T sajátértékeiből álló olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplex zérus-sorozat, hogy*

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n) e_n, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{9.4}$$

Bizonyítás. A 9.15 Lemma szerint létezik a T operátornak olyan $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sajátértéke, amelyre $|\lambda_0| = \|T\|$, emiatt létezik olyan $e_0 \in \mathcal{H}$, $\|e_0\| = 1$ vektor, hogy

$$Te_0 = \lambda_0 e_0.$$

Vezessük be a $H_0 := e_0^\perp$ jelölést, akkor a 9.14 Lemma szerint H_0 egyszerre T- és T^*-invariáns zárt altere $\mathcal{H}$-nak, ha továbbá T_0 jelöli a T H_0-ra való megszorítását, akkor $T_0 : H_0 \to H_0$

szintén kompakt normális operátor kompakt normális operátor a H_0 Hilbert-téren, és ha P_0 jelöli a H_0 altérre való ortogonális projekciót, akkor minden $x \in \mathcal{H}$ mellett fennáll, hogy

$$Tx = \lambda_0(x \,|\, e_0)e_0 + T_0P_0x.$$

Tekintsük most a $T_0 : H_0 \to H_0$ kompakt normális operátort, akkor 9.15 Lemmát ezúttal T_0-ra alkalmazva kapjuk olyan $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $|\lambda_1| = \|T_0\|$ szám és $e_1 \in H_0, \|e_1\| = 1$ vektor létezését, amelyre $Te_1 = T_0e_1 = \lambda_1 e_1$. Vegyük észre, hogy e_0 és e_1 egymásra merőleges vektorok, és ha most H_1 jelöli az $\{e_0, e_1\}^\perp$ zárt alteret $\mathcal{H}$-ban, akkor

$$H_1 = \{e_0\}^\perp \cap \{e_1\}^\perp = \{x \in H_0 \,|\, x \perp e_1\},$$

vagyis H_1 megegyezik az $e_1 \in H_0$ vektor H_0 Hilbert-térbeli ortogonális kiegészítő alterével, ezért a 9.14 Lemma alapján H_1 T_0-, illetve T_0^*-invariáns altere H_0-nak, ezért a $T_0 = T|_{H_0}$ és $T_0^* = T^*|_{H_0}$ összefüggések szerint H_1 T-, és T^*-invariáns altere $\mathcal{H}$-nak. Jelölje P_1 a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér H_1 altérre való ortogonális projekcióját és T_1 a T H_1 altérre való megszorítását, akkor $T_1 : H_1 \to H_1$ kompakt normális operátor, és bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $(I - P_1)x = (x \,|\, e_0)e_0 + (x \,|\, e_1)e_1$ miatt

$$Tx = T(I - P_1)x + TP_1x = \lambda_0(x \,|\, e_0)e_0 + \lambda_1(x \,|\, e_1)e_1 + T_1P_1x.$$

Ezután az eljárást folytatva rekurzióval nyerjük olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{C}$-beli sorozat, és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{H}$-beli ortonormált sorozat létezését, hogy a $H_n \coloneqq \{e_0, \ldots, e_n\}^\perp$ és $T_n \coloneqq T|_{H_n}$ jelölések mellett fennállnak a következők:

(1) T_n kompakt normális operátor és $T_{n+1} = T_n|_{H_{n+1}}$,
(2) $|\lambda_0| = \|T\|$ és minden n-re $|\lambda_{n+1}| = \|T_n\|$ és $Te_n = \lambda_n e_n$,
(3) Minden $x \in \mathcal{H}$ vektor és n természetes szám esetén

$$Tx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x \,|\, e_k)e_k + T_nP_nx,$$

ahol P_n a H_n altérre való ortogonális projekció.

Vezessük be ezek után $n \in \mathbb{N}$ mellett az

$$S_nx \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x \,|\, e_k)e_k, \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $S_n \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort, akkor a tétel igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy $\|T - S_n\| \to 0$, amihez a

$$T - S_n = T_nP_n$$

azonosság és a $\|T_nP_n\| \le \|T_n\| = |\lambda_{n+1}|$ összefüggés figyelembevételével elegendő azt igazolni, hogy $\lambda_n \to 0$. Vegyük észre, hogy az (1) és (2) tulajdonságok szerint $|\lambda_{n+1}| \le |\lambda_n|$, ezért ha $\lambda_n \to 0$ nem teljesülne, akkor létezne olyan $\delta > 0$, hogy $|\lambda_n| \ge \delta$ minden n-re. De akkor bármely $n, m \in \mathbb{N}, n \ne m$ indexekre $e_n \perp e_m$ miatt

$$\|Te_n - Te_m\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \ge 2\delta^2,$$

azaz $\|Te_n - Te_m\| \ge \sqrt{2}\delta$ volna, ami azt jelentené, hogy a $(Te_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat, ami viszont ellentmond T kompaktságának. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $S_n \to T$ az operátornorma szerint, amiből kapjuk, hogy

$$Tx = \lim_{n\to\infty} S_n x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (x \mid e_k) e_k, \qquad x \in \mathcal{H},$$

amivel a (9.4) formulát és egyúttal a tételt is igazoltuk. ■

9.17. Következmény. *Ha T nem-nulla kompakt normális operátor a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-téren, akkor a T (9.4) alatti előállításában szereplő $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sajátvektor-sorozat a $\overline{\operatorname{ran} T}$ zárt altér egy ortonormált bázisát adja.*

Vegyük észre, hogy a 9.16 Hilbert–Schmidt-tétel fenti bizonyításában, illetve az azt megelőző lemmák során a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér komplexitását csupán egyetlen pontban használtuk ki, éspedig ott, hogy egy $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ normális operátor numerikus sugarára $w(T) = \|T\|$ teljesül. Láttuk azonban, hogy ez az egyenlőség önadjungált operátorokra *valós* Hilbert-terek esetén is fennáll (3.65 Tétel), így kompakt önadjungált operátorokra a Hilbert–Schmidt-tétel valós és komplex Hilbert-tér felett egyaránt érvényes. Egészen pontosan fennáll a következő

9.18. Hilbert–Schmidt-tétel, önadjungált változat. *Legyen $\mathcal{H}$ végtelen dimenziós valós vagy komplex Hilbert-tér, és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ kompakt önadjungált operátor. Ekkor létezik az A sajátvektoraiból álló olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{H}$-ban haladó ortonormált sorozat és az A sajátértékeiből álló olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós zérus-sorozat, hogy*

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n) e_n, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{9.5}$$

Végezetül a Hilbert–Schmidt-tétel önadjungált operátorokra vonatkozó változatának felhasználásával megadjuk (valós vagy komplex) Hilbert-terek kompakt operátorainak alapformáját.

Ehhez először legyenek $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozatok a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, legyen továbbá $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy zérus-sorozat. A Bessel-egyenlőtlenség szerint bármely rögzített $x \in \mathcal{H}$ mellett fennáll a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n (x \mid e_k)|^2 \leq \max_{k=0,1,\dots} |\lambda_k|^2 \cdot \|x\|^2$$

egyenlőtlenség, ezért a Parseval-tétel értelmében a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (x \mid e_n) f_n \tag{9.6}$$

ortogonális sor konvergens és a

$$Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n) f_n, \qquad x \in \mathcal{H} \tag{9.7}$$

egyenlőséggel értelmezett $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ függvény folytonos lineáris operátor, melynek normájára fennáll a $\|T\| = \max_{n=0,1,\dots} |\lambda_n|$ egyenlőség. A 9.11 Tétel bizonyításához hasonló érveléssel igazolható, hogy T kompakt operátor, azaz $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy bármely $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ operátor előáll a fenti (9.7) alakban.

Legyen tehát $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ egy kompakt operátor, akkor T^*T kompakt önadjungált operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren. A 9.18 Hilbert–Schmidt-tétel alapján létezik olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ortonormált rendszer $\mathcal{H}$-ban és olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérus-sorozat, hogy

$$T^*Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \,|\, e_n) e_n, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{9.8}$$

Vegyük észre, hogy bármely n mellett λ_n sajátértéke a T^*T pozitív operátornak, ezért $\lambda_n \geq 0$. Feltehető továbbá az is, hogy $\lambda_n > 0$ minden n-re. Jelölje $s_n := \sqrt{\lambda_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, és tekintsük az

$$f_n := \frac{1}{s_n} T e_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

egyenlőséggel értelmezett $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, akkor bármely n, m mellett

$$(f_n \,|\, f_m) = \frac{1}{s_n s_m}(Te_n \,|\, Te_m) = \frac{1}{s_n s_m}(T^*Te_n \,|\, e_m) = \frac{\lambda_n}{s_n s_m}(e_n \,|\, e_m) = \delta_{n,m},$$

ahol $\delta_{n,m}$ a jól ismert Kronecker-szimbólum. Ez azt jelenti, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén ortonormált sorozat $\mathcal{H}$-ban. A (9.8) előállításból leolvasható, hogy az $\{e_n \,|\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ halmaz által generált zárt lineáris altér megegyezik a $\overline{\operatorname{ran}(T^*T)} = \ker(T^*T)^\perp$ altérrel. Másrészt, mivel $\ker T = \ker(T^*T)$, azért a 3.35 Tétel szerint a $\ker T^\perp$-re való ortogonális projekció előáll

$$Px = \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n) e_n, \qquad x \in \mathcal{H}$$

alakban. Speciálisan, $T(x - Px) = 0$ minden x-re, amiből nyerjük, hogy

$$Tx = TPx = \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n) Te_n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x \,|\, e_n) f_n.$$

Vegül az alábbi

$$(Tx \,|\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x \,|\, e_n)(f_n \,|\, y) = \left(x \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} s_n (y \,|\, f_n) e_n \right), \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

egyenlőségből leolvasható, hogy T^* előáll

$$T^* y = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (y \,|\, f_n) e_n, \qquad y \in \mathcal{H}$$

alakban. Ezzel tehát igazoltuk az alábbi eredményt:

9.19. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ egy kompakt operátor, akkor léteznek olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozatok és létezik olyan nemnegatív számokból álló $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérus-sorozat, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra*

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x \,|\, e_n) f_n, \qquad T^* x = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x \,|\, f_n) e_n.$$

9.20. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 9.19 Tétellel újabb bizonyítást nyertünk arra a tényre, miszerint Hilbert-téren bármely kompakt operátor az operátornorma szerint approximálható véges rangú operátorokkal (9.10 Állítás), illetve egy kompakt operátor adjungáltja maga is kompakt (9.9 Tétel). Ez utóbbi eredményt általánosítani fogjuk a 9.28 Tételben tetszőleges Banach-téren értelmezett kompakt operátorra.

9.3. Kompakt operátorok Riesz-féle elmélete

9.21. Riesz-lemma. *Legyen E normált tér, és legyen $M \subseteq E$ valódi zárt lineáris altér. Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $y_\varepsilon \in E$, $\|y_\varepsilon\| = 1$ vektor, hogy $d_M(y_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$, és legyen $y \in E \setminus M$ tetszőleges. Az M zártsága miatt $d \coloneqq d_M(y) > 0$. Legyen $0 < \delta < d$ egyelőre tetszőleges szám, akkor létezik olyan $x_\delta \in M$, hogy $\|y - x_\delta\| < d + \delta$. Legyen $y_\varepsilon \coloneqq \frac{y - x_\delta}{\|y - x_\delta\|}$, ekkor tetszőleges $x \in M$ mellett $x_\delta + \|y - x_\delta\| x \in M$, ezért

$$\|y_\varepsilon - x\| = \frac{1}{\|y - x_\delta\|} \Big\| y - (x_\delta + \|y - x_\delta\| x') \Big\| \geq \frac{1}{d + \delta} \cdot d \geq 1 - \varepsilon,$$

ha $\delta < \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon}$. Ebből pedig $x \in M$-ben infimumot véve kapjuk, hogy $d_M(y_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$. ∎

9.22. Következmény. *Bármely E végtelen dimenziós normált térben létezik olyan csupa egységnyi hosszú vektorokból álló $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy bármely n, m különböző indexek esetén $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in E$, $\|x_0\| = 1$ tetszőleges és jelölje E_0 az x_0 vektor által generált egy dimenziós, ezért szükségképp zárt E lineáris alterét. Az imént igazolt 9.21 Lemma szerint létezik olyan $x_1 \in E$, $\|x_1\| = 1$ vektor, amelyre $d_{E_0}(x_1) \geq \frac{1}{2}$, speciálisan, $\|x_0 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Tegyük fel ezután, hogy $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ és $x_0, x_1, \ldots, x_n$ olyan E-beli vektorok, hogy $\|x_k\| = 1$ és $\|x_k - x_l\| \geq \frac{1}{2}$ teljesül minden $0 \leq k, l \leq n$, $k \neq l$ mellett. Jelölje E_n ezen vektorok által generált véges dimenziós, ezért valódi zárt alterét E-nek, akkor ismét a 9.21 Lemma szerint létezik olyan $x_{n+1} \in E$, $\|x_{n+1}\| = 1$ vektor, hogy $d_{E_n}(x_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$, speciálisan $\|x_{n+1} - x_k\| \geq \frac{1}{2}$ teljesül minden $0 \leq k \leq n$ természetes számra. Ebből a rekurzió tétele szerint adódik a kívánt tulajdonságú sorozat létezése. ∎

9.23. Megjegyzés. A fenti bizonyítás minimális módosításával adódik, hogy bármely végtelen dimenziós normált téren egy rözített $0 < r < 1$ pozitív számhoz megadható olyan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ csupa egy-normájú vektorokból álló sorozat, hogy bármely n, m különböző indexek esetén $\|x_n - x_m\| \geq r$. Szintén nem nehéz belátni, hogy ilyen sorozat $r = 1$ mellett is megadható. Jóval nehezebb azonban az a J. Elton és E. Odell által igazolt eredmény, miszerint bármely végtelen dimenziós normált tér esetén megadható olyan $r > 1$ szám is, amely mellett még mindig létezik az adott tulajdonságú $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat.

9.24. Következmény. *Ha E Banach-tér, akkor az $I : E \to E$ identikus operátor pontosan akkor kompakt, ha E véges dimenziós.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző következményből. ∎

9.25. A kompakt operátorok Riesz-féle alaptétele. *Legyen E Banach-tér, $T \in \mathscr{K}(E)$, és $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ tetszőleges szám. Ekkor az alábbi kijelentések egyenértékűek:*

(i) *λ reguláris értéke T-nek, vagyis $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$.*
(ii) *$T - \lambda I$ szürjektív, azaz $\mathrm{ran}(T - \lambda I) = E$.*
(iii) *$T - \lambda I$ injektív, azaz $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$.*

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii) implikáció nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $T \in \mathscr{K}(E)$ kompakt operátor és $\lambda \in \mathbb{C}$ olyan nem-nulla szám, hogy $\mathrm{ran}(T - \lambda I) = E$, és tegyük fel indirekt módon, hogy $T - \lambda I$ nem injektív. Először azt igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ természetes számra

$$\ker(T - \lambda I)^n \subsetneqq \ker(T - \lambda I)^{n+1}. \tag{9.9}$$

Legyen ui. az indirekt feltevésnek megfelelően $x_1 \in \ker(T - \lambda I)$ tetszőleges nem-nulla vektor, akkor a $T - \lambda I$ szürjektivitása folytán létezik olyan $x_2 \in E$ szintén nem-nulla vektor, hogy $(T - \lambda I)x_2 = x_1$. Ekkor $x_1 \neq 0$ miatt $x_2 \notin \ker(T - \lambda I)$, ugyanakkor

$$(T - \lambda I)^2 x_2 = (T - \lambda I)x_1 = 0,$$

vagyis $x_2 \in \ker(T - \lambda I)^2$, ami azt jelenti, hogy $x_2 \in \ker(T - \lambda I)^2 \setminus \ker(T - \lambda I)$, amivel $n = 1$ esetén a (9.9) valódi tartalmazást igazoltuk. Legyen ezek után $n \geq 2$, és legyen $x_1 \in \ker(T - \lambda I)^n \setminus \ker(T - \lambda I)^{n-1}$ tetszőleges (szükségképp nem-nulla) vektor, akkor ismét $(T - \lambda I)$ szürjektivitását használva kapjuk olyan $x_2 \in E$ vektor létezését, amelyre $(T - \lambda I)x_2 = x_1$. Ebből a fentihez hasonló módon

$$(T - \lambda I)^{n+1} x_2 = (T - \lambda I)^n x_1 = 0,$$

azaz $x_2 \in \ker(T - \lambda I)^{n+1}$ adódik, ha azonban $x_2 \in \ker(T - \lambda I)^n$ volna, akkor

$$0 = (T - \lambda I)^n x_2 = (T - \lambda I)^{n-1} x_1,$$

azaz $x_1 \in \ker(T - \lambda I)^{n-1}$ volna, ami ellentmond a feltevésünknek. Ezzel tehát megmutattuk, hogy a (9.9) valódi tartalmazás bármely n esetén fennáll.

Alkalmazzuk ezek után a 9.21 Lemmát minden rögzített $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ esetén a $\ker(T - \lambda I)^{n+1}$ normált tér $\ker(T - \lambda I)^n$ valódi zárt alterére, akkor kapjuk olyan $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy bármely n-re $\|y_n\| = 1$, $y_n \in \ker(T - \lambda I)^{n+1}$ és

$$\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in \ker(T - \lambda I)^n. \tag{9.10}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\|Ty_m - Ty_n\| \geq \frac{|\lambda|}{2}, \qquad n, m \in \mathbb{N}, m \neq n, \tag{9.11}$$

ami $|\lambda| > 0$ miatt azt jelenti, hogy a $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatból nem lehet kiválasztani konvergens részsorozatot, ami viszont ellentmond a T operátor kompaktságának. Legyenek tehát $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ rögzített indexek, akkor

$$\|Ty_m - Ty_n\| = \|(T - \lambda I)y_m - (T - \lambda I)y_n + \lambda y_m - \lambda y_n\| = \|\lambda y_m - z\|,$$

ahol bevezettük a $z \coloneqq \lambda y_n - (T - \lambda I)y_m + (T - \lambda I)y_n$ jelölést. Vegyük észre, hogy itt $y_n \in \ker(T - \lambda)^{n+1}$ és $m \geq n+1$ miatt $y_n \in \ker(T - \lambda I)^m$, illetve $(T - \lambda I)y_n \in \ker(T - \lambda I)^m$, továbbá $y_m \in \ker(T - \lambda I)^{m+1}$ miatt $(T - \lambda I)y_m \in \ker(T - \lambda I)^m$, amiből következik, hogy $z \in \ker(T - \lambda I)^m$. Ebből és a (9.10) becslésből nyerjük, hogy

$$\|Ty_n - Ty_m\| = |\lambda| \cdot \|y_m - \frac{1}{\lambda} z\| \geq \frac{|\lambda|}{2},$$

amivel a (9.11) egyenlőtlenséget és egyúttal a (ii)$\Rightarrow$(iii) implikációt igazoltuk.

Vegyük észre, hogy az imént bizonyított (ii)$\Rightarrow$(iii) iránnyal együtt a Banach-féle lineáris homeomorfizmus tételen keresztül egyúttal a (ii)$\Rightarrow$(i) irányt is beláttuk, elegendő tehát a (iii)$\Rightarrow$(ii) implikációt igazolnunk. Ennek bizonyításához tegyük fel, hogy $T - \lambda I$ injektív, azaz $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$. Első lépésben megmutatjuk, hogy a $T - \lambda I$ operátor alulról korlátos, vagyis létezik olyan $C > 0$ szám, hogy

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq C\|x\|, \qquad x \in E. \tag{9.12}$$

Tegyük fel ui. indirekt módon, hogy (9.12) nem igaz, akkor létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-beli sorozat, hogy minden n-re $\|x_n\| = 1$ és

$$\|(T - \lambda I)x_n\| \to 0.$$

A T operátor kompaktsága miatt, alkalmas részsorozatra való áttérés után feltehető, hogy $Tx_n \to y$ valamely $y \in E$ vektorra, de akkor $Tx_n - \lambda x_n \to 0$ miatt $\lambda x_n \to y$ is teljesül, és mivel $\|x_n\| = 1$ minden n-re, azért $\|y\| = |\lambda| \neq 0$, vagyis $y \neq 0$. Ugyanakkor

$$Ty = \lim_{n\to\infty} T(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda T x_n = \lambda y,$$

vagyis $(T - \lambda I)y = 0$, ami ellentmond a $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$ feltételnek.

Vegyük észre, hogy ekkor bármely E-beli zárt altér $T - \lambda I$ szerinti képe szintén zárt altér. Legyen ugyanis E_0 tetszőleges zárt altere E-nek, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E_0-beli sorozat, hogy $(T - \lambda)x_n \to y$ valamely $y \in E$ vektorra, de akkor (9.12) miatt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért $x_n \to x$ teljesül valemely $x \in E$ vektorra, amelyre E_0 zártsága miatt $x \in E_0$. Ekkor T folytonossága miatt $(T-\lambda I)x = y$, ami azt jelenti, hogy $y \in (T-\lambda I)\langle E_0\rangle$, amivel megmutattuk, hogy $(T - \lambda I)\langle E_0\rangle$ zárt.

Következő lépésben igazoljuk, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\operatorname{ran}(T - \lambda I)^n = \operatorname{ran}(T - \lambda I)^{n+1}. \tag{9.13}$$

Tegyük fel ui. indirekt módon, hogy (9.13) nem igaz, azaz bármely n-re

$$\operatorname{ran}(T - \lambda I)^{n+1} \subsetneqq \operatorname{ran}(T - \lambda I)^n.$$

A fentiek szerint $\operatorname{ran}(T - \lambda I) = (T - \lambda I)\langle E\rangle$ zárt, amiből az előző észrevétel alapján teljes indukcióval kapjuk, hogy $\operatorname{ran}(T - \lambda I)^n$ zárt minden $n \in \mathbb{N}$ mellett. Ez egyúttal azt jelenti, hogy bármely n-re $\operatorname{ran}(T-\lambda I)^{n+1}$ valódi zárt altere $\operatorname{ran}(T-\lambda I)^n$-nek, ezért a 9.21 Lemma szerint létezik olyan $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden n-re $y_n \in \operatorname{ran}(T - \lambda I)^n$, $\|y_n\| = 1$ és

$$\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in \operatorname{ran}(T - \lambda I)^{n+1}. \tag{9.14}$$

Megmutatjuk, hogy ekkor

$$\|Ty_m - Ty_n\| \geq \frac{|\lambda|}{2}, \qquad n, m \in \mathbb{N}, n \neq m, \tag{9.15}$$

ami ellentmond a T operátor kompaktságának. Legyen ugyanis $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, akkor

$$\|Ty_m - Ty_n\| = \|(T - \lambda I)y_m - (T - \lambda I)y_n + \lambda y_m - \lambda y_n\| = \|z - \lambda y_n\|$$

ahol bevezettük a $z := (T - \lambda I)y_m - (T - \lambda I)y_n + \lambda y_m$ jelölést. Itt $y_m \in \operatorname{ran}(T - \lambda I)^m$ és $n + 1 \leq m$ miatt $(T - \lambda I)y_m \in \operatorname{ran}(T - \lambda I)^{n+1}$, $y_n \in \operatorname{ran}(T - \lambda I)^n$ miatt $(T - \lambda I)y_n \in \operatorname{ran}(T - \lambda I)^{n+1}$, továbbá $\lambda y_m \in \operatorname{ran}(T - \lambda I)^{n+1}$, ezért $z \in \operatorname{ran}(T - \lambda I)^{n+1}$, amiből a (9.14) becslés alapján kapjuk, hogy

$$\|Ty_m - Ty_n\| = |\lambda| \cdot \|y_n - \frac{1}{\lambda}z\| \geq \frac{|\lambda|}{2}, \tag{9.16}$$

amivel a (9.15) egyenlőtlenséget, és egyúttal a (9.13) formulát is beláttuk.

Utolsó lépésben igazoljuk, hogy $\operatorname{ran}(T-\lambda I)=E$. Ehhez rögzítsünk egy $y \in E$ tetszőleges vektort és legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre $\operatorname{ran}(T-\lambda I)^n = \operatorname{ran}(T-\lambda I)^{n+1}$, akkor létezik $x \in E$, hogy

$$(T-\lambda I)^n y = (T-\lambda I)^{n+1} x,$$

amiből nyerjük, hogy

$$(T-\lambda I)^n [y-(T-\lambda I)x] = 0,$$

Vegyük észre, hogy minden n-re $\ker(T-\lambda I)^n = \{0\}$ (ui. injektív függvények kompozíciója injektív), ezért $y=(T-\lambda I)x$. Ezzel igazoltuk, hogy bármely $y \in E$ vektorhoz létezik $x \in E$ vektor, hogy $(T-\lambda I)x = y$, vagyis a $T-\lambda I$ operátor szürjektív. ∎

9.26. Fredholm-féle alternatíva tétel. *Ha E Banach-tér és $T \in \mathscr{K}(E)$ kompakt operátor, akkor egy $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ számra a következő kijelentések közül pontosan egy teljesül:*

(a) $\ker(T-\lambda I) \neq \{0\}$, *vagyis λ a T operátor sajátértéke,*
(b) *minden $y \in E$ rögzített vektor mellett a $(T-\lambda I)x = y$ egyenletnek létezik egyértelmű megoldása.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló a 9.25 Tételből, amely szerint a $T-\lambda I$ operátor vagy egyszerre injektív és szürjektív (ez esetben a (b) kijelentés teljesül), vagy se nem injektív, se nem szürjektív (ez esetben pedig az (a) kijelentés igaz). ∎

9.27. Tétel. *Ha E Banach-tér és $T \in \mathscr{K}(E)$ kompakt operátor, akkor fennállnak a következők:*

(a) *T spektruma megszámlálható halmaz, amelynek legfeljebb egy torlódási pontja lehet, éspedig a 0,*
(b) *T minden nem-nulla spektrum pontja sajátérték, azaz fennáll a*

$$\operatorname{Sp}(T)\setminus\{0\} = \operatorname{Sp}_p(T)\setminus\{0\} \tag{9.17}$$

egyenlőség,
(c) *T minden $\lambda \in \mathbb{K}$ nem-nulla sajátértékéhez tartozó $\ker(T-\lambda I)$ saját altér véges dimenziós.*

Bizonyítás. (b) Elsőként vegyük észre, hogy a 9.25 Tétel értelmében egy $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ szám pontosan akkor van T spektrumában, ha $T-\lambda I$ nem injektív, azaz λ sajátértéke T-nek, amiből a (9.17) egyenlőség következik.

(c) Következő lépésben megmutatjuk, hogy a T bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ sajátértékéhez tartozó $\ker(T-\lambda I)$ saját altér véges dimenziós. Tegyük fel ugyanis indirekt módon, hogy $E_0 := \ker(T-\lambda I)$ nem véges dimenziós altere E-nek, akkor annak B_0 zárt egységgömbje nem kompakt halmaz a 9.22 Következmény szerint, továbbá nyilvánvalóan fennáll a

$$T\langle B_0\rangle = \lambda B_0$$

egyenlőség, ahol a jobb oldalon álló halmaz $\lambda \neq 0$ miatt B_0-lal együtt szintén nem teljesen korlátos halmaz E_0-ban. Ezért $B_0 \subseteq B$ miatt $T\langle B\rangle$ sem lehet teljesen korlátos E-ben, ami viszont ellentmond a T operátor kompaktságának.

(a) Végül megmutatjuk, hogy a $\operatorname{Sp}(T)$ halmaznak a 0-n kívül nem lehet más torlódási pontja, amiből egyúttal az is következik, hogy a $\operatorname{Sp}(T)$ halmaz megszámlálható, ui. bármely $\mathbb{K}$-beli nem megszámlálható halmaznak legalább két torlódási pontja van. Tegyük fel tehát indirekt módon, hogy $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T páronként különböző spektrumpontjaiból álló olyan injektív sorozat, amely konvergál valamely $\lambda \in \mathbb{K}$ nem-nulla számhoz. Feltehető, hogy bármely n-re $\lambda_n \neq 0$, ezért a fentiekben bizonyítottak szerint λ_n a T sajátértéke. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-beli sorozat, hogy minden n-re $x_n \neq 0$ és $Tx_n = \lambda_n x_n$. Könnyen igazolható, hogy az $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz lineárisan független. Jelölje E_n az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vektorok által kifeszített véges dimenziós alteret, akkor világos, hogy E_n valódi zárt lineáris altér E_{n+1}-ben, ezért a 9.21 Lemma szerint megadható olyan $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden n-re fennállnak a következők:

$$y_n \in E_{n+1}, \|y_n\| = 1 \qquad \text{és} \qquad d_{E_n}(y_n) \geq \frac{1}{2}. \tag{9.18}$$

Vegyük észre, hogy $y_n \in E_{n+1} = E_n \oplus \mathbb{K}.x_{n+1}$, ezért y_n egyértelműen előáll

$$y_n = z_n + \alpha_n x_{n+1}, \qquad z_n \in E_n, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

alakban, ahol $y_n \in E_{n+1} \setminus E_n$ miatt $\alpha_n \neq 0$. Megmutatjuk, hogy a $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat, ami ellentmond a T operátor kompaktságának. Ha ugyanis $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor

$$Ty_n = T(\alpha_n x_{n+1} + z_n) = \lambda_{n+1}\alpha_n x_{n+1} + Tz_n = \lambda_{n+1}y_n + Tz_n - \lambda_{n+1}z_n,$$

ezért bármely $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ mellett

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_{n+1}y_n - (\lambda_{n+1}z_n - Tz_n + Ty_m)\|.$$

Vegyük észre, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $T\langle E_k\rangle \subseteq E_k$, ezért $Tz_n \in E_n$, illetve $Ty_m \in E_{m+1} \subseteq E_n$, következésképp

$$\|Ty_n - Ty_m\| = |\lambda_{n+1}| \cdot \|y_n - \lambda_{n+1}^{-1}(\lambda_{n+1}z_n - Tz_n + Ty_m)\| \geq |\lambda_{n+1}| \cdot d_{E_n}(y_n),$$

amiből (9.18) figyelembevételével $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{|\lambda_{n+1}|}{2}$ következik. Mivel az indirekt feltevés szerint $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, azért a kapott becslés mutatja, hogy a $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatból nem választható ki konvergens részsorzat. Ezzel tehát beláttuk, hogy a $\mathrm{Sp}(T)$ halmaznak nem létezhet a 0-tól különböző torlódási pontja. ■

9.4. Néhány további érdekes eredmény

9.28. Schauder-tétel. *Legyenek E és F Banach-terek, akkor egy $T \in \mathscr{B}(E; F)$ folytonos lineáris operátor pontosan akkor kompakt, ha az adjungáltja, vagyis a $T^* \in \mathscr{B}(F'; E')$ operátor kompakt.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $T : E \to F$ kompakt operátor és legyen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy F'-ben haladó sorozat, hogy $\|v_n\| \leq 1$. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $(v_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $u \in E'$, hogy $T^*v_{\sigma(f)} \to u$ a funkcionál norma szerint. Tekintsük ui. a

$$K := \overline{T\langle B_E\rangle} \subseteq F$$

kompakt halmazt és jelölje $f_n := v_n|_K$, akkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{C}(K; \mathbb{K})$-ban haladó függvénysorozat, melyre

$$|||f_n||| = \sup_{x\in B_E} |v_n(Tx)| = \sup_{x\in B_E} |(T^*v_n)(x)| = \|T^*v_n\| \leq M \cdot \|T\|, \tag{9.19}$$

amiből látható, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos, következésképp pontonként korlátos. Megmutatjuk, hogy az $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz ekvifolytonos: legyen ui. $z \in K$ egy tetszőleges pont és legyen

$M > 0$ egy olyan konstans, hogy minden n-re $\|v_n\| \leq M$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $y \in K$ mellett

$$|f_n(z) - f_n(y)| = |v_n(z - y)| \leq M \cdot \|z - y\|.$$

Ebből leolvasható, hogy bármely $\varepsilon > 0$ és $z \in K$ esetén $V := z + \frac{\varepsilon}{M} B_F$ olyan környezete z-nek, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $y \in V$ mellett $|f_n(z) - f_n(y)| \leq \varepsilon$. Ezzel tehát megmutattuk, hogy az $\{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{C}(K; \mathbb{K})$ függvényhalmaz pontonként korlátos és ekvifolytonos, ezért a 2.26 Arzela–Ascoli-tétel értelmében relatív kompakt halmaz. Következésképp létezik az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatnak olyan $(f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ részsorozata, amely a maximum norma szerint konvergál valamely $g \in \mathscr{C}(K; \mathbb{K})$ folytonos függvényhez. A (9.19) formulához hasonlóan ellenőrizhető, hogy

$$|||f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}||| = \|T^* v_{\sigma(n)} - T^* v_{\sigma(m)}\|, \qquad n, m \in \mathbb{N},$$

ezért az E' tér teljessége alapján kapjuk, hogy $T^* v_{\sigma(n)} \to u$ valamely $u \in E'$ funkcionálra, vagyis a T^* adjungált operátor kompakt.

Megfordítva tegyük fel, hogy a T^* adjungált operátor kompakt, akkor a bizonyítás első fele alapján a $T^{**} : E^{**} \to F^{**}$ második adjungált operátor is kompakt. Másrészt ha $J_E : E \to E^{**}$, illetve $J_F : F \to F^{**}$ jelöli a megfelelő kanonikus operátorokat, akkor a a 4.23 Állítás szerint fennáll a $J_F T = T^{**} J_E$ egyenlőség, amiből következik, hogy $J_F T$ kompakt. Ebből pedig a J_F operátor izometrikusságát kihasználva már egyszerűen igazolható, hogy a T operátor maga is kompakt operátor. ■

9.29. Definíció. Legyen E Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(E)$, akkor az $E_0 \subseteq E$ alteret az A *invariáns alterének* nevezzük, ha minden $x \in E_0$ vektor esetén $Ax \in E_0$. Az E_0 alteret az *A hiperinvariáns alterének* nevezzük, ha E_0 invariáns altere az A-val felcserélhető bármely $B \in \mathscr{B}(E)$ operátornak.

Nyilvánvaló, hogy $E_0 = \{0\}$, illetve $E_0 = E$ bármely operátornak invariáns alterei (ezeket triviális invariáns altereknek nevezzük). Viszont mindmáig megoldatlan probléma az, hogy bármely végtelen dimenziós Hilbert-téren adott folytonos lineáris operátornak létezik-e nem-triviális zárt hiperinvariáns altere.

Az invariáns altér problémával kapcsolatos nevezetes pozitív eredmény az alábbi

9.30. Lomonoszov-tétel. *Legyen E komplex Banach-tér és legyen $K \in \mathscr{K}(E)$ egy nem-nulla kompakt operátor, akkor K-nak létezik nem-triviális zárt hiperinvariáns altere.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{A}$ a K-val felcserélhető $T \in \mathscr{B}(E)$ operátorok algebráját, vagyis

$$\mathscr{A} := \{T \in \mathscr{B}(E) \,|\, TK = KT\}.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy K-nak nem létezik nem-triviális zárt hiperinvariáns altere. Egyszerűen elenőrizhető, hogy ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy bármely $x \in E$, $x \neq 0$ vektorra fennáll, hogy

$$\overline{\{Tx \,|\, T \in \mathscr{A}\}} = E. \tag{9.20}$$

Vegyük észre, hogy ekkor K-nak nem létezhet sajátértéke. Valóban, ha λ_0 a K egy sajátértéke volna, akkor az $E_0 := \ker(K - \lambda_0 I)$ jelölést bevezetve bármely $T \in \mathscr{A}$ és $x \in E_0$ mellett

$$(K - \lambda_0 I)Tx = T(K - \lambda_0 I)x = 0,$$

vagyis $Tx \in E_0$ teljesülne, ami azt jelentené, hogy E_0 a K zárt hiperinvariáns altere. A 9.27 Tétel figyelembevételével kapjuk, hogy $\mathrm{Sp}(K) = \{0\}$, ami pedig azzal ekvivalens, hogy T spektrálsugarára $r(K) = 0$ teljesül, azaz

$$\|K^n\|^{1/n} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{9.21}$$

Feltehető, hogy $\|K\| = 1$, ekkor létezik olyan $x_0 \in E$ vektor, hogy $\|Kx_0\| > 1$. Világos továbbá, hogy x_0-ra $\|x_0\| > 1$ teljesül. Vezessük be az

$$X := x_0 + B, \qquad Y := \overline{K\langle X\rangle}$$

jelöléseket, ahol B az E zárt egységgömbje. Az $\|x_0\| > 1$ feltételből világos, hogy $0 \notin X$, továbbá Y olyan kompakt halmaz, amelyre $0 \notin Y$. Ez utóbbi következik abból, hogy ha $x \in B$, akkor

$$\|K(x_0 + x)\| \geq \|Kx_0\| - \|Kx\| \geq \|Kx_0\| - 1 > 0.$$

Vezessük be ezután rögzített $T \in \mathscr{A}$ mellett az

$$U_T := \{x \in E \mid \|Tx - x_0\| < 1\}$$

halmazt, akkor $U_T \subseteq E$ olyan nyílt halmaz, amelyre $0 \notin U_T$ és $x \in U_T$ esetén $Tx \in X$. Vegyük észre, hogy bármely $x \in E$, $x \neq 0$ vektor esetén a (9.20) egyenlőség alapján létezik olyan $T \in \mathscr{A}$, hogy $\|Tx - x_0\| < 1$, következésképp fennáll az

$$\bigcup_{T \in \mathscr{A}} U_T = E \setminus \{0\}$$

összefüggés. Mivel $0 \notin Y$, azért az $(U_T)_{T\in\mathscr{A}}$ rendszer az Y kompakt halmaz egy nyílt fedését adja, következésképp létezik olyan $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ véges halmaz, hogy

$$Y \subseteq \bigcup_{T \in \mathscr{A}_0} U_T. \tag{9.22}$$

Mivel $x_0 \in X$, azért $Kx_0 \in Y$, következésképp (9.22) alapján létezik olyan $T_1 \in \mathscr{A}_0$, hogy $Kx_0 \in U_{T_1}$. Emiatt $T_1Kx_0 \in X$, következésképp

$$K^2T_1x_0 = KT_1Kx_0 \in Y.$$

Ismét (9.22) alapján létezik olyan $T_2 \in \mathscr{A}_0$, hogy $K^2T_1x_0 \in U_{T_2}$, és ezért

$$K^2T_2T_1x_0 = T_2K^2T_1x_0 \in X.$$

Az eljárást folytatva kapjuk olyan $\mathscr{A}_0$-ban haladó $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre

$$K^nT_nT_{n-1}\dots T_0x_0 \in X,$$

Speciálisan X definíciója és $\|x_0\| > 1$ alapján

$$\|K^nT_nT_{n-1}\dots T_0x_0\| \geq \|x_0\| - 1 =: \delta > 0,$$

továbbá $M := \max\{\|T\| \mid T \in \mathscr{A}_0\}$ jelölést bevezetve

$$\|K^nT_nT_{n-1}\dots T_0x_0\| \leq M^n \cdot \|K^n\|\|x_0\|,$$

amiből minden n-re az alábbi becslés adódik:

$$\delta^{1/n} \leq M \cdot \|K^n\|^{1/n}\|x_0\|^{1/n}.$$

Ebből pedig $n \to \infty$ mellett (9.21) figyelembevételével az $1 \leq 0$ hamis egyenlőtlenséghez jutunk. ∎

10. FEJEZET

Hilbert–Schmidt- és nyomoperátorok

10.1. Hilbert-Schmidt operátorok

Ebben a fejezetben szükségünk lesz egy Hilbert-térbeli tetszőleges (tehát nem feltétlenül megszámlálható) vektorrendszer összegének fogalmára, ezért az alábbiakban emlékeztetünk a szummálhatóság fogalmára.

Legyen E valós vagy komplex normált tér és legyen $(x_i)_{i\in\mathscr{I}}$ egy E-beli vektorokból álló nem-üres rendszer. Jelölje $\mathscr{P}_0(\mathscr{I})$ az $\mathscr{I}$ összes véges nem-üres részhalmazaiból álló rendszert, akkor $\mathscr{P}_0(\mathscr{I})$ felett az alábbi

$$I_1 \leq I_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad I_1 \subseteq I_2 \qquad (I_1, I_2 \in \mathscr{P}_0(\mathscr{I}))$$

reláció reflexív és tranzitív, vagyis *előrendezés*. Továbbá $\mathscr{P}_0(\mathscr{I})$ ezzel az előrendezéssel felfelé irányított, vagyis bármely $I_1, I_2 \in \mathscr{P}_0(\mathscr{I})$ halmazokhoz létezik $I \in \mathscr{P}_0(\mathscr{I})$, hogy $I_1 \leq I$ és $I_2 \leq I$ (éspedig $I := I_1 \cup I_2$ ilyen). Jelölje

$$s_I := \sum_{i\in I} x_i, \qquad I \in \mathscr{P}_0(\mathscr{I}),$$

akkor $(s_I)_{I\in\mathscr{P}_0(\mathscr{I})}$ általánosított sorozat E-ben. Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{i\in\mathscr{I}} x_i$ vektorsor konvergens E-ben és az összege az $x \in E$ vektor, ha az $(s_I)_{I\in\mathscr{P}_0(\mathscr{I})}$ általánosított sorozat konvergens és $\lim\limits_{i,\mathscr{I}} s_I = x$, jelölésben

$$\sum_{i\in\mathscr{I}} x_i = x. \tag{10.1}$$

Definíció szerint tehát (10.1) azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $I_0 \subseteq \mathscr{I}$ véges nem-üres halmaz, hogy az $\mathscr{I}$ indexhalmaz bármely véges nem-üres I részhalmazára $I_0 \subseteq I$ esetén

$$\left\| \sum_{i\in I} x_i - x \right\| < \varepsilon$$

teljesül.

Ha $(\alpha_i)_{i\in\mathscr{I}}$ egy csupa nemnegatív valós számokból álló rendszer, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy $\sum\limits_{i\in\mathscr{I}} \alpha_i$ pontosan akkor konvergens, ha az

$$\alpha := \sup_{I\in\mathscr{P}_0(\mathscr{I})} \sum_{i\in I} \alpha_i$$

supremum véges, és ekkor a sor összegére fennáll az

$$\sum_{i\in\mathscr{I}} \alpha_i = \alpha$$

egyenlőség. Ha $\sum_{i\in\mathscr{I}} \alpha_i$ divergens, akkor azt mondjuk, hogy

$$\sum_{i\in\mathscr{I}} \alpha_i = +\infty.$$

Vigyázzunk arra, hogy ha $\mathscr{I} = \mathbb{N}$, akkor egy $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sor konvergenciájának fentiekben bevezetett fogalma eltér a megszokottól: ha ui. a sor feltételesen konvergens (vagyis konvergens, de nem abszolút konvergens), akkor az a fenti definíció értelmében nem lesz konvergens. Ha azonban a sor abszolút konvergens is, abban az esetben e két konvergencia fogalom megegyezik. A továbbiakban kizárólag abszolút konvergens sorokkal fogunk találkozni, ezért amikor egy általánosított sor konvergenciájáról beszélünk, az nem fog félreértést okozni.

A továbbiakban legyen $\mathcal{H}$ egy valós vagy komplex Hilbert-tér. Az alábbiakban kimondjuk a Fourier-sorok néhány alaptételének az ortonormált rendszerek számosságától független változatát, melyek a megszámlálható esettel analóg módon bizonyíthatók.

10.1. Általánosított Parseval-tétel. *Legyen $(x_i)_{i\in\mathscr{I}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben haladó ortogonális rendszer, akkor az alábbi két kijelentés ekvivalens:*

(i) *a $\sum_{i\in\mathscr{I}} x_i$ ortogonális sor konvergens,*

(ii) *a $\sum_{i\in\mathscr{I}} \|x_i\|^2$ numerikus sor konvergens.*

Továbbá a fenti két feltétel bármelyike mellett fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\Big\|\sum_{i\in\mathscr{I}} x_i\Big\|^2 = \sum_{i\in\mathscr{I}} \|x_i\|^2.$$

Hasonlóképp érvényes a Fourier-sorok főtételének alábbi általános alakja:

10.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $(e_i)_{i\in\mathscr{I}}$ egy $\mathcal{H}$-beli ortonormált sorozat, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ vektor*

$$\sum_{i\in\mathscr{I}} (x \,|\, e_i)e_i$$

Fourier-sora konvergens és határértéke megegyezik az x vektor $\{e_i \,|\, i \in \mathscr{I}\}$ vektorrendszer által kifeszített zárt lineáris altérre vett merőleges vetületével. Ha $(e_i)_{i\in\mathscr{I}}$ teljes ortonormált rendszer, akkor fennáll az alábbi egyenlőség:

$$x = \sum_{i\in\mathscr{I}} (x \,|\, e_i)e_i.$$

10.3. Definíció. Legyen $\mathcal{E} := \{e_i \,|\, i \in \mathscr{I}\}$ egy rögzített ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban, akkor egy $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor *Hilbert–Schmidt normáján* a következő véges vagy végtelen számot értjük:

$$\|A\|_2 := \left(\sum_{e\in\mathcal{E}} \|Ae\|^2\right)^{1/2}. \tag{10.2}$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a (10.2) Hilbert–Schmidt norma (látszólag $\mathcal{E}$-től függő) definíciója független az ortonormált bázis megválasztásától:

10.4. Lemma. *Legyenek $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{E}'$ mindketten a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér ortonormált bázisai, legyen továbbá $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ egy folytonos lineáris operátor, akkor*

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \|Ae\|^2 = \sum_{e'\in\mathcal{E}'} \|A^*e'\|^2.$$

Bizonyítás. Legyen E az $\mathcal{E}$ egy tetszőleges véges nem-üres részhalmaza, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} \|Ae\|^2 &= \sum_{e\in E}\left(\sum_{e'\in\mathcal{E}'} |(Ae \mid e')|^2\right)\\ &= \sum_{e'\in\mathcal{E}'}\left(\sum_{e\in E} |(Ae \mid e')|^2\right)\\ &= \sum_{e'\in\mathcal{E}'}\left(\sum_{e\in E} |(e \mid A^*e')|^2\right) \le \sum_{e'\in\mathcal{E}'} \|A^*e'\|^2,\end{aligned}$$

következésképp,

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \|Ae\|^2 = \sup_{E\in\mathscr{P}_0(\mathcal{E})} \sum_{e\in E} \|Ae\|^2 \le \sum_{e'\in\mathcal{E}'} \|A^*e'\|^2,$$

ahol $\mathscr{P}_0(\mathcal{E})$ jelöli az $\mathcal{E}$ összes véges nem-üres részhalmazainak rendszerét. Mivel $A^{**} = A$, azért a fenti egyenlőtlenségből a Lemma állítása már következik. ■

10.5. Következmény. *Egy $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor* (10.2) *alatti Hilbert–Schmidt normája nem függ az $\mathcal{E}$ ortonormált bázis megválasztásától, fennáll továbbá az $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ egyenlőség.*

Bizonyítás. Legyenek $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ mindketten a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér ortonormált bázisai, akkor az előző Lemma kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \|Ae\|^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} \|A^*e\|^2 = \sum_{e'\in\mathcal{E}'} \|Ae'\|^2,$$

amiből mindkét állítás következik. ■

10.6. Definíció. Az $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort *Hilbert–Schmidt operátornak* nevezzük, ha a Hilbert–Schmidt normája véges, azaz $\|A\|_2 < \infty$. A Hilbert–Schmidt operátorok halmazát a $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük.

A fentiekben láttuk, hogy egy folytonos lineáris operátor pontosan akkor Hilbert–Schmidt operátor, ha az adjungáltja az, vagyis $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ zárt az adjungált képzésre. A következőkben látni fogjuk, hogy $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ lineáris altere $\mathscr{B}(\mathcal{H})$-nak, és a Hilbert–Schmidt norma valóban normát definiált $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ felett.

10.7. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és jelölje $\|\cdot\|$ a $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ feletti operátornormát, $\|\cdot\|_2$ pedig a Hilbert–Schmidt normát. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra teljesülnek a következők:*

(a) $\|A+B\|_2 \le \|A\|_2 + \|B\|_2$ *és* $\|\lambda A\|_2 = |\lambda|\|A\|_2$ *(a $0 \cdot (+\infty) := 0$ megállapodással),*
(b) $\|A\| \le \|A\|_2$,
(c) $\|AB\|_2 \le \|A\|_2\|B\|$, *illetve* $\|AB\|_2 \le \|A\|\|B\|_2$.

Bizonyítás. (a) Legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy ortonormált bázisa, legyenek továbbá $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ korlátos operátorok. Legyen E az $\mathcal{E}$ egy tetszőleges véges nem-üres részhalmaza, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E}\|Ae+Be\|^2 &\le \sum_{e\in E}\|Ae\|^2 + 2\sum_{e\in E}\|Ae\|\|Be\| + \sum_{e\in E}\|Be\|^2 \\ &\le \sum_{e\in E}\|Ae\|^2 + 2\sqrt{\sum_{e\in E}\|Ae\|^2}\sqrt{\sum_{e\in E}\|Be\|^2} + \sum_{e\in E}\|Be\|^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{e\in E}\|Ae\|^2} + \sqrt{\sum_{e\in E}\|Be\|^2}\right)^2 \\ &\le (\|A\|_2 + \|B\|_2)^2,\end{aligned}$$

amiből $\|A+B\|_2 \le \|A\|_2 + \|B\|_2$ következik. A $\|\lambda A\|_2 = |\lambda|\|A\|$ összefüggés nyilvánvaló a definícióból.

(b) Legyen $e \in \mathcal{H}$ egy tetszőleges egy-normájú vektor, akkor létezik olyan $\mathcal{E}$ ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban, hogy $e \in \mathcal{E}$, következésképp fennáll, hogy $\|Ae\| \le \|A\|_2$, amiből $\|A\| \le \|A\|_2$ már következik.

(c) Legyenek ismét $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok, $\mathcal{E}$ pedig egy tetszőleges ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban, akkor

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}}\|ABe\|^2 \le \sum_{e\in\mathcal{E}}\|A\|^2\|Be\|^2 = \|A\|^2\|B\|_2^2,$$

vagyis $\|AB\|_2 \le \|A\|_2\|B\|$. Emiatt pedig

$$\|AB\|_2 = \|B^*A^*\|_2 \le \|B^*\|\|A^*\|_2 = \|B\|\|A\|_2,$$

amivel a (c) állítást is beláttuk. ■

10.8. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér. A Hilbert–Schmidt operátorok $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ halmaza az adjungálásra zárt kétoldali ideál $\mathscr{B}(\mathcal{H})$-ban, emellett a $\|\cdot\|_2$ leképezés norma $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ felett.*

10.9. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor adott $u, v \in \mathcal{H}$ vektorok mellett vezessük be az alábbi*

$$(u \otimes v)(x) \coloneqq (x \,|\, v)u, \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel definiált $u \otimes v : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris operátort. Ekkor fennállnak a következők:

(a) *$u \otimes v \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$, emellett $\|u \otimes v\| = \|u \otimes v\|_2 = \|u\|\|v\|$,*
(b) *$\lambda(u \otimes v) = (\lambda u) \otimes v = u \otimes (\bar{\lambda} v)$, $u, v \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{K}$,*
(c) *$(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$, $u_1, u_2, v \in \mathcal{H}$,*
(d) *$u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2$, $u, v_1, v_2 \in \mathcal{H}$,*
(e) *$(u \otimes v)^* = v \otimes u$,*
(f) *$A \circ (u \otimes v) = (Au) \otimes v = u \otimes (A^* v)$, $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$,*
(g) *bármely $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ véges rangú operátorhoz léteznek olyan $u_1, \ldots, u_n$ és $v_1, \ldots, v_n$ $\mathcal{H}$-beli vektorok, amelyek mellett T előáll $T = \sum_{j=1}^{n} u_j \otimes v_j$ alakban.*

Bizonyítás. Csak az (a) és (g) kijelentéseket igazoljuk, a többi egyenlőség egyszerű számolással ellenőrizhető.

(a) Egyfelől

$$|(u \otimes v)(x)| \leq \|u\|\|v\|\|x\|, \qquad x \in \mathcal{H},$$

amiből $u \otimes v$ folytonossága és egyúttal az $\|u \otimes v\| \leq \|u\|\|v\|$ becslés is következik. Másrészt $x := \frac{v}{\|v\|}$ választással fennáll az $(u \otimes v)(x) = \|u\|\|v\|$ egyenlőség, amiből $\|u \otimes v\| = \|u\|\|v\|$ következik. Az $\|u \otimes v\|_2 = \|u\|\|v\|$ egyenlőség igazolásához jelölje $f := \frac{v}{\|v\|}$ és legyen $\mathcal{E}$ egy olyan ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban, amelyre $f \in \mathcal{E}$, akkor

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \|(u \otimes v)(e)\|^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}} |(e \mid v)|^2 \|u\|^2 = |(f \mid v)|^2 \|u\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2,$$

amiből az $\|u \otimes v\|_2 = \|u\|\|v\|$ egyenlőség következik.

(g) Jelölje M a T véges rangú folytonos operátor képterét és legyen $u_1, u_2, \dots, u_n$ egy ortonormált bázis M-ben, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $Tx \in M$, ezért Tx előáll

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} (Tx \mid u_j) = \sum_{j=1}^{n} (x \mid T^* u_j) u_j$$

alakban, amiből $v_j := T^* u_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ jelöléssel már következik a $T = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j \otimes v_j$ egyenlőség. ∎

10.10. Definíció. Az alábbiakban, ha $\mathcal{E}$ ortonormált bázisa a $\mathcal{H}$ Hilbert-térnek, akkor $\mathscr{P}_0(\mathcal{E})$ jelöli az $\mathcal{E}$ összes véges nem-üres részhalmazainak rendszerét. Ha $E \in \mathscr{P}_0(\mathcal{E})$, akkor P_E-vel jelöljük a $\operatorname{span}(E)$ véges dimenziós altérre vett ortogonális projekciót, illetve

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}) := \{P_E \mid E \in \mathscr{P}_0(\mathcal{E})\}.$$

10.11. Lemma. *Legyenek $e_1, e_2, \dots, e_n$ egymásra páronként merőleges egy-normájú vektorok a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, jelölje továbbá P az ezek által kifeszített altérre vett ortogonális projekciót. Ekkor bármely $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor esetén $AP \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ és*

$$\|AP\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \|Ae_j\|^2.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ egy olyan ortonormált bázisa, hogy minden $j = 1, 2, \dots, n$ mellett $e_j \in \mathcal{E}$, akkor egy $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor esetén AP Hilbert–Schmidt normájára fennáll, hogy

$$\|AP\|_2 = \sum_{e \in \mathcal{E}} \|APe\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|Ae_j\|^2,$$

amit bizonyítani kellett. ∎

10.12. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$-beli sorozat, illetve legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. Az alábbi kijelentések egyenértékűek:*

(i) *$A \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ és $\|A_n - A\|_2 \to 0$,*

(ii) *a $\mathcal{H}$ valamely $\mathcal{E}$ ortonormált bázisára fennáll, hogy*

$$\sup_{P \in \mathbf{P}(\mathcal{E})} \|(A - A_n)P\|_2 \to 0,$$

(iii) *a $\mathcal{H}$ valamely $\mathcal{E}$ ortonormált bázisára fennáll, hogy*

$$\sup_{P\in\mathbf{P}(\mathcal{E})} \|P(A-A_n)\|_2 \to 0.$$

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii) implikáció nyilvánvaló az $\|(A-A_n)P\|_2 \leq \|A-A_n\|_2$ egyenlőségből, hiszen $\|P\| = 1$ teljesül minden P nem-nulla ortogonális projekcióra. Megfordítva tegyük fel, hogy (ii) teljesül. Az előző Lemma szerint, ha $E \in \mathscr{P}_0(\mathcal{E})$, akkor

$$\|(A-A_n)P_E\|_2^2 = \sum_{e\in E} \|(A-A_n)e\|^2,$$

így a Hilbert–Schmidt norma definíciója szerint

$$\sup_{P\in\mathbf{P}(\mathcal{E})} \|(A-A_n)P\|_2^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} \|(A-A_n)e\|^2 = \|A-A_n\|_2^2 \tag{10.3}$$

teljesül. Másrészt ha n olyan index, hogy $\|A-A_n\|_2$ véges, akkor a a 10.7 Állítás szerint szerint $\|A\|_2 \leq \|A-A_n\|_2 + \|A\|_2 < \infty$, vagyis $A \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$, amivel a (ii)⇒(i) implikációt is igazoltuk. Végül a (10.3) egyenlőség szerint

$$\begin{aligned}\sup_{P\in\mathbf{P}(\mathcal{E})} \|P(A-A_n)\|_2 &= \sup_{P\in\mathbf{P}(\mathcal{E})} \|(A-A_n)^*P\|_2 = \|(A-A_n)^*\|_2\\ &= \|A-A_n\|_2 = \sup_{P\in\mathbf{P}(\mathcal{E})} \|(A-A_n)P\|_2,\end{aligned}$$

amiből a (ii) illetve (iii) kijelentések ekvivalenciája következik. ■

10.13. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor a véges rangú folytonos lineáris operátorok a $\|\cdot\|_2$ norma szerint sűrű lineáris alteret alkotnak $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$-ban.*

Bizonyítás. A 10.9 Lemma (a) és (g) pontja alapján következik, hogy bármely véges rangú korlátos operátor Hilbert–Schmidt operátor.

Legyen $A \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ és legyen $\mathcal{E}$ ortonormált bázisa $\mathcal{H}$-nak, illetve rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ pozitív számot, akkor a

$$\sup_{E\in\mathscr{P}_0(\mathcal{E})} \sum_{e\in E} \|Ae\|^2 = \|A\|_2^2$$

összefüggés miatt létezik olyan $E \subseteq \mathcal{E}$ véges nem-üres halmaz, hogy

$$\|A\|_2^2 - \varepsilon^2 \leq \sum_{e\in E} \|Ae\|^2.$$

Jelölje P a az E halmaz által generált véges dimenziós altérre vett ortogonális projekciót, akkor $T := AP$ véges rangú operátor és

$$\|A-T\|_2^2 = \|A(I-P)\|_2^2 = \sum_{e\in\mathcal{E}\setminus E} \|Ae\|^2 = \|A\|_2^2 - \sum_{e\in E} \|Ae\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

vagyis $\|A-T\|_2 \leq \varepsilon$. ■

10.14. Következmény. *Minden Hilbert–Schmidt operátor kompakt operátor.*

Bizonyítás. A kompakt operátorok halmaza $\mathscr{B}(\mathcal{H})$-ban zárt halmazt alkot az operátornormára nézve, és minden folytonos véges rangú operátor kompakt. Az előző tétel értelmében tetszőleges A Hilbert–Schmidt operátorhoz választhatunk olyan $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folytonos végesrangú operátorokból álló sorozatot, hogy $\|A_n - A\|_2 \to 0$. Másfelől

$$\|A_n - A\| \leq \|A_n - A\|_2,$$

ezért $A_n \to A$ az operátornorma szerint, így A valóban kompakt operátor. ∎

10.15. Állítás. *Legyen $\mathcal{E}$ ortonormált bázis a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, akkor az*

$$(A \mid B)_2 := \sum_{e\in\mathcal{E}} (Ae \mid Be), \qquad A, B \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H}), \tag{10.4}$$

egyenlőséggel értelmezett $(\cdot \mid \cdot)_2 : \mathscr{B}_2(\mathcal{H}) \times \mathscr{B}_2(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ leképezés skalárszorzat, továbbá

$$\|A\|_2 = \sqrt{(A \mid A)_2}$$

teljesül bármely $A \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ Hilbert–Schmidt operátorra.

Bizonyítás. A $(\cdot \mid \cdot)_2$ leképezés jóldefiniáltságához elegendő azt észrevennünk, hogy tetszőleges $E \subseteq \mathcal{E}$ véges nem-üres halmaz esetén

$$\sum_{e\in E} |(Ae \mid Be)| \leq \sum_{e\in E} \|Ae\| \|Be\| \leq \sqrt{\sum_{e\in E} \|Ae\|^2} \sqrt{\sum_{e\in E} \|Be\|^2} \leq \|A\|_2 \|B\|_2,$$

így a (10.4) formulában szereplő sor abszolút konvergens. Másfelől, mivel $(\cdot \mid \cdot)$ $\mathcal{H}$ feletti skalárszorzat, azért a műveletek folytonossága miatt $(\cdot \mid \cdot)_2$ is skalárszorzatot definiál $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ felett. ∎

Vegyük észre, hogy a (10.4) formulával definiált skalárszorzat csupán látszólag függ az $\mathcal{E}$ ortonormált bázis megválasztásától. Valóban, ha $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ mindketten a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér ortonormált bázisai és $(\cdot \mid \cdot)_2$, illetve $(\cdot \mid \cdot)_2'$ jelöli a megfelelő skalárszorzatokat $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ felett, akkor a polarizációs formulából és a $(A \mid A)_2 = \|A\|_2^2 = (A \mid A)_2'$ összefüggésből kapjuk, hogy

$$(A \mid B)_2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|A + i^k B\|_2^2 = (A \mid B)_2'.$$

A következő eredmény a $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ prehilbert tér teljességével foglalkozik:

10.16. Tétel. *A Hilbert–Schmidt operátorok $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ halmaza a* (10.4) *alatti $(\cdot \mid \cdot)_2$ skalárszorzattal ellátva teljes, vagyis Hilbert-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathscr{B}_2(\mathcal{H})$-ban haladó sorozat, amely a $\|\cdot\|_2$ Hilbert–Schmidt normában Cauchy-sorozat. Az

$$\|A_n - A_m\| \leq \|A_n - A_m\|_2, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

egyenlőtlenség miatt $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{B}(\mathcal{H})$-beli operátornorma szerint is Cauchy-sorozat, ezért $\|A_n - A\| \to 0$ teljesül valamely $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátorra. Megmutatjuk, hogy $A \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ és $\|A_n - A\|_2 \to 0$. Ehhez vegyük először észre, hogy tetszőleges véges rangú P ortogonális projekcióra $\|A_n P - AP\|_2 \to 0$, ugyanis

$$\|(A_n - A)P\|_2 \leq \|A_n - A\| \|P\|_2 \to 0.$$

Emiatt tetszőleges rögzített $n \in \mathbb{N}$ mellett $\|A_n P - AP\|_2 = \lim_{m\to\infty} \|A_n P - A_m P\|_2$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és válasszuk meg az $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet úgy, hogy $\|A_n - A_m\|_2 \leq \varepsilon$ teljesüljön minden $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N$ esetén. Ha most P tetszőleges véges rangú ortogonális projekció $\mathcal{H}$-ban és $n \geq N$, akkor

$$\|A_n P - AP\|_2 = \lim_{m\to\infty} \|A_n P - A_m P\|_2 \leq \limsup_{m\to\infty} \|A_n - A_m\|_2 \|P\| \leq \varepsilon,$$

vagyis $\sup\limits_{P\in\mathbb{P}(E)} \|(A_n - A)P\|_2 \to 0$. A Lemma 10.12 szerint ez éppen azt jelenti, hogy $A \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ és $\|A_n - A\|_2 \to 0$. ■

10.17. Állítás. *Ha $A, B \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ Hilbert–Schmidt operátorok, $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pedig tetszőleges folytonos lineáris operátor, akkor*

(a) $(A \,|\, B)_2 = (B^* \,|\, A^*)_2$,
(b) $(TA \,|\, B)_2 = (A \,|\, T^*B)_2$,
(c) $(AT \,|\, B)_2 = (A \,|\, BT^*)_2$.

Bizonyítás. (a) A polarizációs azonosságot és az $\|S^*\|_2 = \|S\|_2$, $S \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ összefüggést alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(A \,|\, B)_2 &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \|A + i^k B\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \|A^* - i^k B^*\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \|(-i^k)(B^* + i^k A^*\|_2^2 \\ &= (B^* \,|\, A^*)_2.\end{aligned}$$

(b) Legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy ortonormált bázisa, akkor

$$(TA \,|\, B)_2 = \sum_{e\in\mathcal{E}} (TAe \,|\, Be) = \sum_{e\in\mathcal{E}} (Ae \,|\, T^*Be) = (A \,|\, T^*B)_2.$$

(c) A már bizonyított (a) és (b) formulákat felhasználva kapjuk, hogy

$$(AT \,|\, B)_2 = (B^* \,|\, T^*A^*)_2 = (TB^* \,|\, A^*)_2 = (A \,|\, BT^*)_2.$$

Ezzel a (c) összefüggést is igazoltuk. ■

10.2. Nyom osztályú operátorok

10.18. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $A, B \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ Hilbert–Schmidt operátorok és legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ egy ortonormált bázisa. Akkor $T = B^*A$ választással*

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} |(Te \,|\, e)| \le \|A\|_2 \|B\|_2, \tag{10.5}$$

emellett fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} (Te \,|\, e) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \|A + i^k B\|_2^2. \tag{10.6}$$

Bizonyítás. Legyen először E az $\mathcal{E}$ egy tetszőleges véges nem-üres részhalmaza, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E}|(Te\,|\,e)| &= \sum_{e\in E}|(Ae\,|\,Be)| \\ &\leq \sum_{e\in E}\|Ae\|\|Be\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{e\in E}\|Ae\|^2}\sqrt{\sum_{e\in E}\|Be\|^2} \\ &\leq \|A\|_2\|B\|_2,\end{aligned}$$

amiből a (10.5) becslés már következik. Emellett a $\sum_{e\in\mathcal{E}}(Te\,|\,e)$ általánosított sor konvergens, továbbá bármely $e \in \mathcal{H}$ mellett a polarizációs formula alapján

$$(Te\,|\,e) = (Ae\,|\,Be) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k\|Ae + i^k Be\|^2,$$

amiből nyerjük, hogy

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}(Te\,|\,e) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \sum_{e\in\mathcal{E}}\|Ae + i^k Be\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k\|A + i^k B\|_2^2.$$

Ezzel a (10.6) egyenlőséget is igazoltuk. ■

10.19. Definíció. A $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátort *nyom osztályú operátornak* (vagy *nukleáris operátornak*) nevezzük, ha $|T|^{1/2}$ Hilbert–Schmidt operátor, azaz $|T|^{1/2} \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$. A nyom osztályú operátorok halmazát $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük, és egy $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ operátor esetén a

$$\|T\|_1 := \||T|^{1/2}\|_2^2$$

véges számot a T nyom-normájának nevezzük.

A definíció alapján világos, hogy bármely $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ nyom osztályú operátor esetén a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér tetszőleges $\mathcal{E}$ ortonormált bázisa esetén a $\sum_{e\in\mathcal{E}}(|T|e\,|\,e)$ általánosított sor konvergens és fennáll a

$$\|T\|_1 = \sum_{e\in\mathcal{E}}(|T|e\,|\,e) \tag{10.7}$$

egyenlőség.

10.20. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. Ekkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$,
(ii) $|T| \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$,
(iii) $|T|^{1/2} \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$,
(iv) *léteznek olyan $T_1, T_2 \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ Hilbert–Schmidt operátorok, hogy T előáll $T = T_1T_2$ alakban.*

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv) implikációk mindegyike nyilvánvaló, ezért csak a (iv)⇒(i) irányt igazoljuk. Tegyük fel, hogy T előáll $T = T_1T_2$ alakban valamely T_1, T_2

Hilbert–Schmidt operátorok mellett és vegyük a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy tetszőleges $\mathcal{E}$ ortonormált bázisát. Tekintsük a T operátor $T = V|T|$ polárfelbontását a 8.46 Tétel értelmében. A 8.48 Állítás alapján $|T|$ előáll

$$|T| = V^*T = (V^*T_1)T_2$$

alakban, így a 10.18 Lemmát $A = T_2$ és $B = T_1^*V$ szereposztásban alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} (|T|e \,|\, e) \leq \|T_2\|_2 \|T_1^*V\|_2 < +\infty,$$

vagyis $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$. ■

10.21. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, akkor $AT, TA \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$.*

Bizonyítás. Legyenek T_1 és T_2 olyan Hilbert–Schmidt operátorok, hogy $T = T_1T_2$, akkor $AT = (AT_1)T_2$, illetve $TA = T_1(T_2A)$, ahol AT_1 és T_2A szintén Hilbert–Schmidt operátorok, ezért az előző tétel értelmében $AT, TA \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$. ■

A 10.18 Lemma és a 10.20 Tétel szerint, ha $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ egy nyom operátor, akkor a $\mathcal{H}$ bármely $\mathcal{E}$ ortonormált bázisa esetén a $\sum_{e\in\mathcal{E}} (Te \,|\, e)$ sor konvergens és az összege független az $\mathcal{E}$ ortonormált bázis választásától. Emiatt értelmes a következő

10.22. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor egy $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ operátor *nyomán* az alábbi

$$\mathrm{Tr}(T) := \sum_{e\in\mathcal{E}} (Te \,|\, e)$$

valós vagy komplex számot értjük, ahol $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ tetszőleges ortonormált bázisa.

Világos, hogy bármely $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ operátor esetén

$$\mathrm{Tr}(|T|) = \|T\|_1.$$

10.23. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $A, B \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$ Hilbert–Schmidt operátorok, akkor*

$$\mathrm{Tr}(B^*A) = (A \,|\, B)_2.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló a 10.15 Állításból. ■

10.24. Következmény. *Legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok. Ha A és B mindketten Hilbert–Schmidt operátorok, vagy az A és B operátorok valamelyike nyom osztályú, akkor fennáll a*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $A, B \in \mathscr{B}_2(\mathcal{H})$, akkor az előző állítás és a 10.17 Állítás alapján

$$\mathrm{Tr}(AB) = (B^* \,|\, A)_2 = (A^* \,|\, B)_2 = \mathrm{Tr}(BA).$$

Tegyük fel, hogy $A \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$, akkor A előáll $A = T_1T_2$ valamely T_1, T_2 Hilbert–Schmidt operátorokra, ezért a 10.17 Állítás szerint

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(T_1T_2B) = (T_2B \,|\, T_1^*)_2 = (T_2 \,|\, T_1^*B^*)_2 = \mathrm{Tr}(BT_1T_2) = \mathrm{Tr}(BA),$$

amivel a bizonyítás kész. ■

10.25. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $S, T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$, valamint $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, akkor fennállnak a következők:*

(a) $\|T\| \leq \|T\|_1 = \|T^*\|_1$,
(b) $\|AT\|_1 \leq \|A\|\|T\|_1$ *és* $\|TA\|_1 \leq \|T\|_1\|A\|$,
(c) $\|S + T\|_1 \leq \|S\|_1 + \|T\|_1$ *és bármely* $\lambda \in \mathbb{K}$ *számra* $\|\lambda T\|_1 = |\lambda|\|T\|_1$

Bizonyítás. (a) Ha $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$, akkor definíció szerint $\|T\|_1 = \||T|^{1/2}\|_2^2$, és mivel a Hilbert–Schmidt norma majorálja az operátornormát, azért

$$\|T\|_1 \geq \||T|^{1/2}\|^2 = \||T|\| = \|T\|.$$

A $\|T\|_1 = \|T^*\|_1$ egyenlőség igazolásához tekintsük a T operátor $T = V|T|$ polárfelbontását, akkor $T^* = |T|V^*$ és $V^*V|T| = |T|$ figyelembevételével

$$TT^* = V|T|^2V^* = (V|T|V^*)^2,$$

amiből a pozitív négyzetgyök egyértelműsége miatt kapjuk, hogy

$$|T^*| = V|T|V^*.$$

Az előző következmény alapján

$$\mathrm{Tr}(|T^*|) = \mathrm{Tr}(V|T|V^*) = \mathrm{Tr}(V^*V|T|) = \mathrm{Tr}(|T|),$$

amiből a $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$ egyenlőség adódik.

(b) Legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ és $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ vektor esetén

$$(T^*A^*ATx \,|\, x) = (A^*ATx \,|\, Tx) \leq \|A^*A\|\|Tx\|^2 = (\|A\|^2 \cdot T^*Tx \,|\, x),$$

amiből következik, hogy $T^*A^*AT \leq \|A\|^2 \cdot T^*T$. A 8.41 Állítás alapján kapjuk, hogy $|AT| \leq \|A\| \cdot |T|$, ezért bármely $\mathcal{H}$-beli $\mathcal{E}$ ortonormált bázis esetén fennáll, hogy

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} (|AT|e \,|\, e) \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} \|A\| \cdot (|T|e \,|\, e),$$

azaz $\|AT\|_1 \leq \|A\|\|T\|_1$. Másfelől az (a) pont szerint

$$\|TA\|_1 = \|(A^*T^*)^*\|_1 = \|A^*T^*\|_1 \leq \|A^*\|\|T^*\|_1 = \|A\|\|T\|_1,$$

amivel a (b) pont mindkét egyenlőtlenségét igazoltuk.

(c) Legyenek $S, T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ és tekintsük az S, T, valamint $S + T$ polárfelbontását:

$$S = U|S|, \qquad T = V|T|, \qquad S + T = W|S + T|,$$

akkor egyúttal $|S + T| = W^*(S + T)$, és ezért

$$|S + T| = W^*(S + T) = W^*U|S| + W^*V|T|.$$

Legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ egy ortonormált bázisa, akkor

$$\begin{aligned}\|S+T\|_1 &= \sum_{e\in\mathcal{E}}(|S+T|e\,|\,e)\\ &= \sum_{e\in\mathcal{E}}(W^*U|S|e\,|\,e) + \sum_{e\in\mathcal{E}}(W^*U|S|e\,|\,e)\\ &= \sum_{e\in\mathcal{E}}(|S|^{1/2}e\,|\,|S|^{1/2}U^*We) + \sum_{e\in\mathcal{E}}(|T|^{1/2}e\,|\,|T|^{1/2}V^*We)\\ &= (|S|^{1/2}\,|\,|S|^{1/2}U^*W)_2 + (|T|^{1/2}\,|\,|T|^{1/2}V^*W)_2\\ &\le \left\||S|^{1/2}\right\|_2\left\||S|^{1/2}U^*W\right\|_2 + \left\||T|^{1/2}\right\|_2\left\||T|^{1/2}V^*W\right\|_2\\ &\le \||S|^{1/2}\|_2^2 + \||T|^{1/2}\|_2^2\\ &= \|S\|_1 + \|T\|_1,\end{aligned}$$

amivel a bizonyítandó becslést beláttuk. A $\|\lambda T\|_1 = |\lambda|\|T\|_1$, $(\lambda \in \mathbb{K})$, egyenlőség nyilvánvaló. ■

10.26. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér. A nyom osztályú operátorok $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ halmaza az adjungálásra zárt kétoldali ideál $\mathscr{B}(\mathcal{H})$-ban, és a $\|\cdot\|_1$ leképezés normát definiál $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ felett.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző állításból. ■

10.27. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor a véges rangú operátorok halmaza a $\|\cdot\|_1$ norma szerint sűrű lineáris alteret alkot $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$-ban.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{H}$ véges, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ végtelen dimenziós és legyen először $A \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ egy pozitív operátor, akkor a 9.16 Hilbert–Schmidt-tétel szerint létezik olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat és olyan $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa nemnegatív számokból álló sorozat, hogy A előáll

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x\,|\,e_n)e_n, \qquad x\in\mathcal{H}$$

alakban. Vegyük észre, hogy ha $u \in \mathcal{H}$ olyan vektor, hogy minden n-re $u \perp e_n$, akkor $u \in [\operatorname{ran} A]^\perp = \ker A$, és ezért $Au = 0$. Emiatt ha $\mathcal{E}$ egy olyan ortonormált bázis $\mathcal{H}$-ban, hogy minden n-re $e_n \in \mathcal{E}$, akkor fennáll, hogy

$$\|A\|_1 = \sum_{e\in\mathcal{E}}(Ae\,|\,e) = \sum_{n=0}^{\infty}(Ae_n\,|\,e_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n,$$

ami egyúttal azt jelenti, hogy $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Jelölje rögzített n mellett A_n az alábbi

$$A_nx := \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x\,|\,e_n)e_n$$

egyenlőséggel definiált véges rangú operátort, akkor $0 \le A_n \le A$ és ezért

$$\|A-A_n\|_1 = \sum_{e\in\mathcal{E}}((A-A_n)e\,|\,e) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k,$$

amiből $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ miatt $\|A-A_n\|_1 \to 0$ következik.

Legyen ezután $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ tetszőleges és legyen $T = V|T|$ a T operátor polárfelbontása. Az imént bizonyítottak alapján létezik olyan $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa véges rangú operátorokból álló sorozat, hogy $\|A_n - |T|\|_1 \to 0$, akkor $T_n := VA_n$ jelöléssel $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén csupa véges rangú operátorokból álló sorozat, hogy

$$\|T_n - T\|_1 = \|V(A_n - |T|)\|_1 \leq \|V\|\|A_n - |T|\|_1 \to 0,$$

amivel az állítást beláttuk. ■

10.3. A kompakt és nyom osztályú operátorok duálisa

Az alábbiakban igazolni fogjuk, hogy $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ a $\|\cdot\|_1$ normával teljes, azaz Banach-tér. Valójában ennél jóval többet igazolunk: megmutatjuk, hogy $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ kitüntetett módon azonosul a kompakt operátorok $\mathscr{K}(\mathcal{H})$ Banach-terének topológiai duálisával, vagyis fennáll a $\mathscr{K}(\mathcal{H})' = \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ egyenlőség.

10.28. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, akkor egy $\theta : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ leképezést szeszkvilineárisnak nevezünk, ha θ első változójában lineáris, második változójában konjugáltan lineáris.

10.29. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ valós (illetve komplex) Hilbert-tér és legyen $\theta : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ olyan bilineáris (illetve szeszkvilineáris) leképezés, amelyre valamely $\gamma \geq 0$ konstans mellett fennáll a következő:*

(10.8) $$|\theta(x, y)| \leq \gamma\|x\|\|y\|, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Akkor létezik egyetlen $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $\|T\| \leq \gamma$ folytonos lineáris operátor, amely mellett θ előáll az alábbi alakban:

(10.9) $$\theta(x, y) = (Tx \,|\, y), \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást komplex Hilbert-tér esetén végezzük el, a valós eset hasonlóan igazolható.

Rögzített $y \in \mathcal{H}$ mellett tekintsük a következő

$$f_y(x) := \theta(x, y), \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $f_y : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált, akkor a (10.8) becslés szerint f_y folytonos és $\|f_y\| \leq \gamma\|y\|$. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen $S(y) \in \mathcal{H}$ vektor, amelyre

$$(x \,|\, S(y)) = \theta(x, y), \qquad x \in \mathcal{H},$$

emellett a reprezentáns vektor normájára $\|S(y)\| = \|f_y\|$ teljesül, következésképp fennáll, hogy

(10.10) $$\|S(y)\| \leq \gamma\|y\|, \qquad y \in \mathcal{H}.$$

Megmutatjuk, hogy S lineáris: legyenek ui. $x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ tetszőlegesek, akkor

$$(x \,|\, S(y_1 + y_1)) = \theta(x, y_1 + y_2) = \theta(x, y_1) + \theta(x, y_2) = (x \,|\, S(y_1) + S(y_2)),$$

amiből az $S(y_1 + y_2) = S(y_1) + S(y_2)$ egyenlőség következik. Hasonlóképp, ha $x, y \in \mathcal{H}$ és $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor

$$(x \,|\, S(\lambda y)) = \theta(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\theta(x, y) = \bar{\lambda}(x \,|\, S(y)) = (x \,|\, \lambda S(y)),$$

amiből az $S(\lambda y) = \lambda Sy$ egyenlőség és egyúttal S linearitása is következik. A (10.10) becslés szerint S folytonos éspedig $\|S\| \leq \gamma$ normával, továbbá

$$\theta(x, y) = (x \,|\, Sy) = (S^* x \,|\, y), \qquad x, y \in \mathcal{H}$$

figyelembevételével $T \coloneqq S^*$ választással (10.9) teljesül. ■

10.30. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor bármely $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ és $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ operátorokra fennáll, hogy*

$$|\mathrm{Tr}(TA)| \leq \|T\|_1 \|A\|.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges ortonormált bázisa és legyen $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$, illetve legyen $T = V|T|$ a T operátor polárfelbontása, akkor fennáll, hogy

$$\mathrm{Tr}(TA) = \sum_{e \in \mathcal{E}} (V|T|Ae \,|\, e) = \sum_{e \in \mathcal{E}} (|T|^{1/2} Ae \,|\, |T|^{1/2} V^* e) = (|T|^{1/2} A \,|\, |T|^{1/2} V^*)_2,$$

ezért a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$|\mathrm{Tr}(TA)| \leq \||T|^{1/2} A\|_2 \||T|^{1/2} V^*\|_2 \leq \||T|^{1/2}\|_2^2 \|A\| \|V^*\| \leq \|A\| \|T\|_1,$$

amivel a bizonyítandó becslést beláttuk. ■

10.31. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $u, v \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektorok. Ekkor $\|u \otimes v\|_1 = \|u\| \|v\|$ és*

$$\mathrm{Tr}(u \otimes v) = (u \,|\, v).$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$(u \otimes v)^* (u \otimes v) = \|u\|^2 \cdot (v \otimes v) = \frac{\|u\|^2}{\|v\|^2} (v \otimes v)^2,$$

amiből következik, hogy $|u \otimes v| = \frac{\|u\|}{\|v\|} v \otimes v$. Legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ egy olyan ortonormált bázisa, hogy $f \coloneqq \frac{v}{\|v\|} \in \mathcal{E}$, akkor

$$\|u \otimes v\|_1 = \sum_{e \in \mathcal{E}} (|u \otimes v|(e) \,|\, e) = \frac{\|u\|}{\|v\|} ((v \otimes v)(f) \,|\, f) = \frac{\|u\|}{\|v\|} (f \,|\, v)(v \,|\, f) = \|u\| \|v\|.$$

Hasonlóképp,

$$\mathrm{Tr}(u \otimes v) = ((u \otimes v)(f) \,|\, f) = \frac{1}{\|v\|^2} (v \,|\, v)(u \,|\, v) = (u \,|\, v),$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

10.32. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és rögzített $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ esetén tekintsük az alábbi*

$$\Phi_T(K) \coloneqq \mathrm{Tr}(KT) = \mathrm{Tr}(TK), \qquad K \in \mathscr{K}(\mathcal{H}) \tag{10.11}$$

egyenlőséggel definiált $\Phi_T : \mathscr{K}(\mathcal{H}) \to \mathbb{K}$ leképezést, akkor $\Phi_T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})'$ folytonos lineáris funkcionál, melynek normájára $\|\Phi_T\| = \|T\|_1$ teljesül. Emellett bármely $\Phi \in \mathscr{K}(\mathcal{H})'$ folytonos lineáris funkcionál egyértelműen előáll $\Phi = \Phi_T$ alakban valamely $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ operátorra.

Bizonyítás. Legyen először $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$, akkor a 10.30 Lemma szerint fennáll a

$$|\Phi_T(K)| \leq \|T\|_1 \|K\|, \qquad K \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$$

becslés, amiből kapjuk, hogy $\Phi_T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})'$ és $\|\Phi_T\| \leq \|T\|_1$. Legyen ezután $\Phi \in \mathscr{K}(\mathcal{H})'$ egy tetszőleges folytonos lineáris funkcionál. A 10.9 Lemma jelöléset alkalmazva vezessük be az alábbi

$$\theta(u, v) := \Phi(u \otimes v), \qquad u, v \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $\theta : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ leképezést, mely a 10.9 Lemma szerint valós Hilbert-tér esetén bilineáris, komplex Hilbert-tér esetén pedig szeszkvilineáris függvény, emellett fennáll a

$$|\theta(u, v)| \leq \|\Phi\| \|u\| \|v\|, \qquad u, v \in \mathcal{H}$$

becslés. A 10.29 Lemma szerint létezik egyetlen olyan $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor, amelyre

$$(Tu \,|\, v) = \Phi(u \otimes v), \qquad u, v \in \mathcal{H},$$

emellett T normájára fennáll a $\|T\| \leq \|\Phi\|$ becslés. Megmutatjuk, hogy $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ és $\Phi = \Phi_T$. Legyen először $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ egy véges rangú folytonos lineáris operátor, akkor a 10.9 Lemma szerint B előáll $B = \sum_{k=1}^{n} u_j \otimes v_j$ alakban valamely $u_1, \ldots, u_n$ és $v_1, \ldots, v_n$ vektorokra, ezért

$$\begin{aligned}
\Phi(B) &= \sum_{j=1}^{n} \Phi(u_j \otimes v_j) = \sum_{j=1}^{n} (Tu_j \,|\, v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Tr}(Tu_j \otimes v_j) = \mathrm{Tr}(TB).
\end{aligned}$$

Mivel a véges rangú korlátos operátorok sűrű alteret alkotnak $\mathscr{K}(\mathcal{H})$-ban, azért a $\Phi_T = \Phi$ egyenlőség igazolva lesz, ha belátjuk, hogy $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$. Ennek igazolásához legyen $T = V|T|$ a T operátor polárfelbontása és legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ egy ortonormált bázisa, akkor $|T| = V^*T$ figyelembevételével az $\mathcal{E}$ bármely E véges nem-üres részhalmazára fennáll, hogy

$$\sum_{e \in E} (|T|e \,|\, e) = \sum_{e \in E} (Te \,|\, Ve) = \sum_{e \in E} \Phi(e \otimes Ve) = \Phi(T_E), \tag{10.12}$$

ahol a $T_E := \sum_{e \in E} e \otimes Ve$ jelölést bevezettük. Ugyanakkor a 10.9 Lemma szerint

$$T_E = \Big(\sum_{e \in E} e \otimes e \Big) \circ V^* = PV^*,$$

ahol P az E által generált altérre vett ortogonális projekció. Következésképp kapjuk, hogy $\|T_E\| \leq \|P\| \|V^*\| \leq 1$ és ezért $\Phi(T_E) \leq \|\Phi\|$, amiből (10.12) figyelembevételével $\|T\|_1 \leq \|\Phi\|$ következik. Ezzel a $T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ tartalmazást és a $\Phi = \Phi_T$ egyenlőséget is igazoltuk. ■

10.33. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor a $\Phi(T) := \Phi_T$ egyenlőséggel értelmezett $\Phi : \mathscr{B}_1(\mathcal{H}) \to \mathscr{K}(\mathcal{H})'$ leképezés izometrikus izomorfizmus. Speciálisan $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ a $\| \cdot \|_1$ normával Banach-tér.*

Az alábbiakban megvizsgáljuk a $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$ Banach-tér duálisát is: igazolni fogjuk, hogy $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})'$ izometrikusan izomorf a $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ teljes operátoralgebrával:

10.34. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és rögzített $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ mellett tekintsük az alábbi*

$$\Psi_A(T) := \operatorname{Tr}(TA) = \operatorname{Tr}(AT), \qquad T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H}) \tag{10.13}$$

egyenlőséggel definiált $\Psi_A : \mathscr{B}_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{K}$ leképezést, akkor $\Psi_A \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})'$ folytonos lineáris funkcionál, melynek normájára $\|\Psi_A\| = \|A\|$ teljesül. Emellett bármely $\Psi \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})'$ folytonos lineáris funkcionál egyértelműen előáll $\Psi = \Psi_A$ alakban valamely $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ operátorra.

Bizonyítás. Legyen először $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, akkor a 10.30 Lemma szerint fennáll a

$$|\Psi_A(T)| \leq \|A\|\|T\|_1, \qquad T \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})$$

becslés, amiből kapjuk, hogy $\Psi_A \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})'$ és $\|\Psi_A\| \leq \|A\|$. Legyen ezután $\Psi \in \mathscr{B}_1(\mathcal{H})'$ egy tetszőleges folytonos lineáris funkcionál. Csakúgy mint a 10.32 Tétel bizonyításában, vezessük be az alábbi

$$\theta(u, v) := \Psi(u \otimes v), \qquad u, v \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel definiált $\theta : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ leképezést, mely valós esetben bilineáris, komplex esetben pedig szeszkvilineáris függvény. Emellett az $\|u \otimes v\|_1 = \|u\|\|v\|$ egyenlőség alapján fennáll, hogy

$$|\theta(u, v)| \leq \|\Psi\|\|u\|\|v\|, \qquad u, v \in \mathcal{H},$$

ezért a 10.29 Lemma szerint létezik egyetlen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, $\|A\| \leq \|\Psi\|$ folytonos lineáris operátor, amelyre

$$(Au \,|\, v) = \Psi(u \otimes v), \qquad u, v.$$

A 10.32 Tétel bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy bármely $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ véges rangú operátorra fennáll a

$$\Psi(B) = \operatorname{Tr}(AB) = \Psi_A(B)$$

egyenlőség. Mivel a véges rangú operátorok sűrű halmazt alkotnak $\mathscr{B}_1(\mathcal{H})$-ban, azért ebből a $\Psi = \Psi_A$ egyenlőség már következik. ■

10.35. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor a $\Psi(A) := \Psi_A$ egyenlőséggel értelmezett $\Psi : \mathscr{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{B}_1(\mathcal{H})'$ leképezés izometrikus izomorfizmus.*

11. FEJEZET

Nemkorlátos operátorok

11.1. Nemkorlátos operátor adjungáltja

A korábbiakban bevezettük egy adott $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek között értelmezett A folytonos lineáris operátor adjungáltját, éspedig azt az $A^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ operátort, amely eleget tesz az

$$(Ax \,|\, y) = (x \,|\, A^* y), \qquad x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$$

adjungálási azonosságoknak. A gyakorlatban azonban nem elegendő csupán folytonos lineáris operátorokra szorítkozni, ui. a legtöbb differenciál operátor nem korlátos.

Az alábbiakban mindenütt legyen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ valós vagy komplex Hilbert-tér, legyen továbbá $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ egy a $\mathcal{H}$ valamely $\mathrm{dom}(T)$-vel jelölt lineáris alterén értelmezett lineáris operátor. Célunk a korlátos esettel analóg módon egy olyan $T^* : \mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátort értelmezni, amely eleget tesz a

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, T^* y), \qquad x \in \mathrm{dom}(T), y \in \mathrm{dom}(T^*) \tag{11.1}$$

ún. *adjungálási azonosságnak.* A korlátos esethez hasonlóan, rögzített $y \in \mathcal{K}$ mellett a $T^* y$ vektort kézenfekvő volna úgy definiálni, mint azt az $y^* \in \mathcal{H}$ vektort, amely mellett fennáll, hogy

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, y^*), \qquad x \in \mathrm{dom}(T). \tag{11.2}$$

Ezzel a definícióval azonban több probléma is felmerül: egyfelől egy a (11.2) egyenlőségnek eleget tevő y^* létezése egyúttal azt is jelenti, hogy a

$$\varphi(x) := (Tx \,|\, y), \qquad x \in \mathrm{dom}(T)$$

egyenlőséggel értelmezett $\varphi : \mathrm{dom}(T) \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál folytonos, ami a T operátor nem-korlátossága esetén nem feltétlenül teljesül bármely y-ra. Másfelől, ha $z \in [\mathrm{dom}(T)]^\perp$ egy tetszőleges vektor, akkor minden $x \in \mathrm{dom}(T)$ vektorra

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, y^*) = (x \,|\, y^* + z),$$

ami azt jelenti, hogy ha $[\mathrm{dom}(T)]^\perp$ tartalmaz nem-nulla z vektort, akkor az y^* vektor nem egyértelmű. Ha azonban $[\mathrm{dom}(T)]^\perp = \{0\}$ (vagy ami ugyanaz, $\mathrm{dom}(T)$ sűrű altér $\mathcal{H}$-ban), továbbá y^* és z^* mindketten olyan vektorok $\mathcal{H}$-ban, hogy

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, y^*) = (x \,|\, z^*), \qquad x \in \mathrm{dom}(T),$$

akkor $y^* - z^* \in [\mathrm{dom}(T)]^\perp$, következésképp $y^* = z^*$. Ez azt jelenti, hogy az adjungált operátor $T^* y := y^*$ egyenlőséggel való értelmezése pontosan akkor ad jóldefiniált függvényt, ha T értelmezési tartománya sűrű lineáris altere $\mathcal{H}$-nak. Erre a későbbiekben úgy fogunk utalni, hogy $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ *sűrűn definiált* lineáris operátor.

Ezen észrevételek után az adjungált operátort a következőképp értelmezzük:

11.1. Definíció. Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ valós vagy komplex Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor. A

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(T^*) &:= \{y \in \mathcal{K} \mid \exists y^* \in \mathcal{H} : \ (Tx \mid y) = (x \mid y^*), \quad (\forall x \in \operatorname{dom}(T))\}, \\ T^*y &:= y^*, \qquad y \in \operatorname{dom}(T^*) \end{aligned}$$

egyenlőséggel értelmezett $T^* : \operatorname{dom}(T^*) \to \mathcal{H}$ leképezést a T *Neumann-adjungáltjának* (vagy röviden *adjungáltjának*) nevezzük.

11.2. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor, akkor $\operatorname{dom}(T^*)$ a $\mathcal{K}$ lineáris altere és $T^* : \operatorname{dom}(T^*) \to \mathcal{H}$ lineáris operátor.*

Bizonyítás. Legyenek $y_1, y_2 \in \operatorname{dom}(T^*)$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tetszőlegesek, jelölje továbbá $y_j^* := T^*y_j$, $(j = 1, 2)$, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(T)$ vektorra

$$\begin{aligned} (Tx \mid \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \overline{\lambda}_1 (Tx \mid y_1) + \overline{\lambda}_2 (Tx \mid y_2) \\ &= \overline{\lambda}_1 (x \mid y_1^*) + \overline{\lambda}_2 (x \mid y_2^*) \\ &= (x \mid \lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^*), \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \operatorname{dom}(T^*)$ és $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2$. ■

Az alábbi állítás gyakran hasznos annak eldöntésében, hogy egy adott $y \in \mathcal{K}$ vektor mellett fennáll-e az $y \in \operatorname{dom}(T^*)$ tartalmazás:

11.3. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor. Egy adott $y \in \mathcal{K}$ vektorra a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) *$y \in \operatorname{dom} T^*$,*

(ii) *a $\varphi : \operatorname{dom}(T) \to \mathbb{K}$,*

$$\varphi(x) := (Tx \mid y), \qquad (x \in \operatorname{dom}(T))$$

lineáris funkcionál folytonos,

(iii) *létezik olyan $M_y \geq 0$ konstans, amely mellett fennáll a következő:*

$$|(Tx \mid y)| \leq M_y \cdot \|x\|, \qquad x \in \operatorname{dom}(T).$$

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii) implikáció, valamint a (ii)⇔(iii) ekvivalencia nyilvánvaló, ezért csak a (ii)⇒(i) irányt igazoljuk. Tegyük fel, hogy a (ii) alatti φ lineáris funkcionál folytonos, akkor az 1.28 Következmény szerint φ egyértelműen kiterjed a $\operatorname{dom}(T)$ altér lezártjára (vagyis $\mathcal{H}$-ra) $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{H}'$ folytonos lineáris funkcionállá. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen olyan $y^* \in \mathcal{H}$ vektor, amely mellett $\widetilde{\varphi}$ előáll

$$\widetilde{\varphi}(x) = (x \mid y^*), \qquad x \in \mathcal{H}$$

alakban. Minthogy $\widetilde{\varphi}$ a φ kiterjesztése, azért bármely $x \in \operatorname{dom}(T)$ esetén

$$(x \mid y^*) = \varphi(x) = (Tx \mid y),$$

ami azt jelenti, hogy $y \in \operatorname{dom}(T^*)$ és $T^*y = y^*$. ■

Az alábbiakban példát mutatunk olyan T sűrűn definiált lineáris operátorra, amely adjungáltja csupán az $y = 0$ vektoron van értelmezve, vagyis amelyre $\operatorname{dom}(T^*) = \{0\}$.

11.4. Példa. Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ szeparábilis Hilbert-terek és legyenek $(f_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszerek a $\mathcal{H}$, illetve $\mathcal{K}$ terekben. (Az $(f_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ rendszer tehát olyan teljes $\mathcal{H}$-beli rendszer, amelyre $(f_{n,m}\,|\,f_{n',m'})=1$ pontosan akkor, ha $n=n'$ és $m=m'$, és $(f_{n,m}\,|\,f_{n',m'})=0$ egyébként.) Jelölje D az $\{f_{n,m}\,|\,n,m=0,1,2,\ldots\}$ vektorok által generált lineáris alteret és legyen $T:D\to\mathcal{K}$ az a lineáris operátor, amelyet adott $n,m\in\mathbb{N}$ esetén a

$$Tf_{n,m}\coloneqq e_n$$

egyenlőséggel értelmezünk. Világos, hogy T sűrűn értelmezett. Megmutatjuk, hogy

$$\operatorname{dom}(T^*)=\{0\}.$$

Legyen ui. $y\in\operatorname{dom}(T^*)$ egy tetszőleges vektor és legyen $n\in\mathbb{N}$ rögzített, akkor bármely $m\in\mathbb{N}$ mellett

$$(e_n\,|\,y)=(Tf_{n,m}\,|\,y)=(f_{n,m}\,|\,y). \tag{11.3}$$

Mivel bármely n-re az $\{f_{n,m}\,|\,m\in\mathbb{N},m\neq n\}$ rendszer ortonormált, azért a Bessel-egyenlőtlenség szerint a (11.3) egyenlőség jobb oldalán álló kifejezés nullához tart, amennyiben $m\to\infty$, következésképp $(e_n\,|\,y)=0$. Ezzel megmutattuk, hogy minden n-re $e_n\in[\operatorname{dom}(T^*)]^\perp$, ami pedig ekvivalens azzal, hogy $\operatorname{dom}(T^*)=\{0\}$.

11.5. Állítás. *Legyenek $S,T:\mathcal{H}\rightarrowtail\mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátorok, hogy $S\subset T$, akkor $T^*\subset S^*$.*

Bizonyítás. Legyen $y\in\operatorname{dom}(T^*)$, akkor tetszőleges $x\in\operatorname{dom}(S)$ esetén

$$(Sx\,|\,y)=(Tx\,|\,y)=(x\,|\,T^*y),$$

következésképp $y\in\operatorname{dom}(S^*)$ és $S^*y=T^*y$. ■

11.6. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek valamint $T:\mathcal{H}\rightarrowtail\mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor, akkor*

$$\ker T^*=[\operatorname{ran}T]^\perp.$$

Bizonyítás. Legyen először $y\in[\operatorname{ran}T]^\perp$, akkor

$$(Tx\,|\,y)=0,\qquad x\in\operatorname{dom}(T),$$

következésképp $y\in\operatorname{dom}(T^*)$ és $T^*y=0$, vagyis $y\in\ker T^*$. Megfordítva tegyük fel, hogy $y\in\ker T^*$, akkor

$$0=(x\,|\,T^*y)=(Tx\,|\,y),\qquad x\in\operatorname{dom}(T),$$

következésképp $y\in[\operatorname{ran}T]^\perp$. ■

11.2. Az adjungálás és a műveletek

A korlátos operátorok elméletében igazoltuk, hogy ha $A,B\in\mathscr{B}(\mathcal{H})$ mindketten korlátos operátorok, akkor bármely α,β skalárok mellett fennállnak az

$$(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*,\qquad\text{és}\qquad(AB)^*=B^*A^*$$

azonosságok.

Nemkorlátos operátorok esetében a helyzet koránt sem ennyire egyszerű. Előfordulhat ui., hogy bár az S és T operátorok mindegyike a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy sűrű alterén van értelmezve, az értelmezési tartományok metszete már nem sűrű, sőt valójában az is megeshet, hogy az S és T operátorok értelmezési tartományainak egyetlen közös eleme van, éspedig a nulla. Ebben az esetben nem is tudunk beszélni az összeg operátor adjungáltjáról. Hasonlóan komplikált a helyzet a szorzat (vagyis kompozíció) adjungáltját illetően.

11.7. Definíció. Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, illetve legyenek $S, T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ lineáris operátorok, akkor az S és T operátorok összegét a $\operatorname{dom}(S+T) \coloneqq \operatorname{dom}(S) \cap \operatorname{dom}(T)$ altéren az

$$(S+T)x \coloneqq Sx + Tx, \qquad x \in \operatorname{dom}(S) \cap \operatorname{dom}(T)$$

egyenlőséggel, az S operátor egy $\lambda \in \mathbb{K}$ számmal való szorzatát a $\operatorname{dom}(\lambda S) \coloneqq \operatorname{dom}(S)$ altéren a

$$(\lambda S)x \coloneqq \lambda \cdot Sx, \qquad x \in \operatorname{dom}(S)$$

egyenlőséggel értelmezzük.

11.8. Definíció. Legyenek $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, illetve legyenek $T : \mathcal{G} \rightarrowtail \mathcal{H}$, valamint $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ lineáris operátorok, akkor az S és T operátorok szorzatát a

$$\operatorname{dom}(ST) \coloneqq \{x \in \operatorname{dom}(T) \,|\, Tx \in \operatorname{dom}(S)\}$$

altéren az

$$(ST)x \coloneqq S(Tx), \qquad x \in \operatorname{dom}(ST)$$

egyenlőséggel értelmezzük.

Az alábbiakban az egyszerűbb megfogalmazhatóság kedvéért feltesszük, hogy $\mathcal{G} = \mathcal{H} = \mathcal{K}$, azonban megjegyezzük, hogy az állítások érvényben maradnak különböző terek közt értelmezett operátorok esetében is, feltéve, hogy a megfelelő műveletek értelmesek.

11.9. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $S, T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn értelmezett lineáris operátorok.*

(a) *Bármely $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ szám esetén $(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*$.*
(b) *Ha $S+T$ sűrűn definiált, akkor $S^* + T^* \subset (S+T)^*$.*
(c) *Ha ST sűrűn definiált, akkor $T^* S^* \subset (ST)^*$.*

Bizonyítás. (a) Ha $y \in \operatorname{dom}(S^*)$, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(S)$ vektorra

$$(\lambda Sx \,|\, y) = (x \,|\, \overline{\lambda} S^* y)$$

teljesül, vagyis $y \in \operatorname{dom}(\lambda S)^*$ és $(\lambda S)^* y = \overline{\lambda} S^* y$. Következésképp $(\lambda S)^* \subset \overline{\lambda} S^*$. Megfordítva, legyen $y \in \operatorname{dom}(\lambda S)^*$, akkor minden $x \in \operatorname{dom}(S)$ mellett

$$(Sx \,|\, \overline{\lambda} y) = (\lambda Sx \,|\, y) = (x \,|\, (\lambda S)^* y),$$

vagyis $\overline{\lambda} y \in \operatorname{dom}(S^*)$ és $S^*(\overline{\lambda} y) = (\lambda S)^* y$. Ha itt $\lambda \neq 0$, akkor ebből $y \in \operatorname{dom}(S^*)$ is következik, vagyis fennáll a $\operatorname{dom}(\lambda S)^* = \operatorname{dom}(\overline{\lambda} S^*)$ egyenlőség

(b) Tegyük fel, hogy a $\operatorname{dom}(S) \cap \operatorname{dom}(T)$ altér sűrű $\mathcal{H}$-ban és válasszunk egy tetszőleges $y \in \operatorname{dom}(T^*) \cap \operatorname{dom}(S^*)$ elemet. Ekkor minden $x \in \operatorname{dom}(S) \cap \operatorname{dom}(T)$ vektorra

$$((S+T)x \,|\, y) = (x \,|\, S^* y) + (x \,|\, T^* y) = (x \,|\, S^* y + T^* y),$$

amiből kapjuk, hogy $y \in \operatorname{dom}(S+T)^*$ és $(S+T)^* y = S^* y + T^* y$, vagyis $(S+T)^* \subset S^* + T^*$.

(c) Tegyük fel, hogy az ST operátorszorzat sűrűn definiált. Legyen $y \in \operatorname{dom}(T^*S^*)$, azaz $y \in \operatorname{dom}(S^*)$ és $S^*y \in \operatorname{dom}(T^*)$, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(ST)$ esetén

$$(STx \,|\, y) = (Tx \,|\, S^*y) = (x \,|\, T^*S^*y),$$

vagyis $y \in (ST)^*$ és $(ST)^*y = T^*S^*y$, következésképp $T^*S^* \subset (ST)^*$. ■

11.10. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy $(0 \cdot S)^* = 0 \cdot S^*$ egyenlőség csak akkor teljesül, ha $\operatorname{dom}(S^*) = \mathcal{H}$. Valóban, míg az előbbi operátor értelmezési tartománya a teljes $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, addig az utóbbi csupán a $\operatorname{dom}(S^*)$ altéren van értelmezve.

Az alábbiakban megvizsgálunk néhány olyan speciális esetet, amikor a fenti Állítás (b) és (c) pontja egyenlőséggel teljesül.

11.11. Állítás. *Legyenek $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H}; \mathcal{K})$ korlátos operátor, akkor $(T + A)^* = T^* + A^*$.*

Bizonyítás. A 11.9 Állítás (2) pontja szerint elegendő azt igazolnunk, hogy $\operatorname{dom}(T + A)^* \subseteq \operatorname{dom}(T^*)$. Legyen tehát $y \in \operatorname{dom}(T + A)^*$, akkor minden $x \in \operatorname{dom}(T)$ esetén

$$(Tx \,|\, y) = (Tx + Ax \,|\, y) - (Ax \,|\, y) = (x \,|\, (T + A)^*y - A^*y),$$

amiből kapjuk, hogy $y \in \operatorname{dom}(T^*)$. ■

11.12. Állítás. *Legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált lineáris operátor, és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ korlátos operátor, akkor $(AT)^* = T^*A^*$.*

Bizonyítás. A 11.9 Állítás (3) pontja szerint elegendő azt igazolnunk, hogy $\operatorname{dom}(AT)^* \subseteq \operatorname{dom}(T^*A^*)$. Legyen tehát $y \in \operatorname{dom}(AT)^*$, azt kell megmutatnunk, hogy $A^*y \in \operatorname{dom}(T^*)$. Ez viszont teljesül, ui. minden $x \in \operatorname{dom}(T)$ esetén

$$(Tx \,|\, A^*y) = (ATx \,|\, y) = (x \,|\, (AT)^*y),$$

vagyis valóban $A^*y \in \operatorname{dom}(T^*)$ és $T^*A^*y = (AT)^*y$. ■

11.13. Megjegyzés. Vigyázzunk arra, hogy az előző állítás feltételei mellett a $(TA)^* = A^*T^*$ egyenlőség nem feltétlenül igaz, olyannyira, hogy a $(TA)^*$ adjungált nem is biztos, hogy létezik. Ha ui. $e \in \mathcal{H}$, $\|e\| = 1$ egy olyan vektor, amelyre $e \notin \operatorname{dom}(T)$, és A az $Ax = (x \,|\, e)e$ egyelőséggel értelmezett korlátos operátor, akkor A képtere megegyezik a $\mathbb{K}.e$ egy-dimenziós altérrel, amiből könnyen látható, hogy $Ax \in \operatorname{dom}(T)$ pontosan akkor igaz, ha $Ax = 0$, vagyis ha x merőleges e-re. Ezért

$$\operatorname{dom}(TA) = \{x \in \mathcal{H} \,|\, x \perp e\} = \{e\}^\perp,$$

ami viszont nem sűrű $\mathcal{H}$-ban.

11.14. Lemma. *Ha $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált injektív és sűrű képterű operátor, akkor T^* is injektív és*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Bizonyítás. Elsőként vegyük észre, hogy a $\ker T^* = [\operatorname{ran} T]^\perp = \{0\}$ egyenlőség folytán T^* injektív. Jelölje a rövidség kedvéért $S := T^{-1}$, akkor a feltételek szerint S sűrűn definiált lineáris operátor. Megmutatjuk, hogy $S^* = (T^*)^{-1}$. Legyen ui. $y \in \operatorname{dom}(T^*)$, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(S)$ esetén $Sx \in \operatorname{dom}(T)$ és $TSx = x$, ezért

$$(Sx \,|\, T^*y) = (TSx \,|\, y) = (x \,|\, y).$$

Következésképp azt kapjuk, hogy $T^*y \in \operatorname{dom}(S^*)$ és $S^*T^*y = y$, azaz S^* balinverze a T^* operátornak. Hasonlóképp legyen $y \in \operatorname{dom}(S^*)$, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(T)$ mellett $Tx \in \operatorname{dom}(S)$ és $STx = x$, ezért

$$(Tx \,|\, S^*y) = (STx \,|\, y) = (x \,|\, y),$$

következésképp kapjuk, hogy $S^*y \in \operatorname{dom}(T^*)$ és $T^*S^*y = y$, azaz S^* jobbinverze is a T^* operátornak, vagyis valóban fennáll az $S^* = (T^*)^{-1}$ egyenlőség. ■

11.15. Állítás. *Legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált lineáris operátor és legyen $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan korlátos sűrű képterű injektív operátor. Akkor TB^{-1} sűrűn definiált és fennáll, hogy*

$$(TB^{-1})^* = (B^{-1})^*T^*.$$

Bizonyítás. Jelölje a rövidség kedvéért $S := B^{-1}$, akkor a feltétel szerint tehát S sűrűn definiált és $S^{-1} = B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. Elsőként TS sűrűn definiáltságához vegyük észre, hogy

$$\operatorname{dom}(TS) = \{x \in \operatorname{dom}(S) \,|\, Sx \in \operatorname{dom}(T)\} = S^{-1}\langle \operatorname{dom}(T)\rangle = B\langle \operatorname{dom}(T)\rangle,$$

ahol B folytonossága alapján

$$\operatorname{ran} B = B\langle \overline{\operatorname{dom}(T)}\rangle \subseteq \overline{B\langle \operatorname{dom}(T)\rangle},$$

vagyis $\operatorname{dom}(TS)$ lezárása tartalmazza a $\operatorname{ran} B$ sűrű alteret, következésképp maga is sűrű. A 11.9 Állítás szerint elegendő azt igazolnunk, hogy $\operatorname{dom}(TS)^* \subseteq \operatorname{dom}(S^*T^*)$. Legyen tehát $y \in \operatorname{dom}(TS)^*$, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(T^*)$ esetén $SBx = x$ alapján

$$(Tx \,|\, y) = (TSBx \,|\, y) = (Bx \,|\, (TS)^*y) = (x \,|\, B^*(TS)^*y),$$

vagyis $y \in \operatorname{dom}(T^*)$ és $T^*y = B^*(TS)^*y$. A 11.14 Lemma szerint fennáll a $(B^*)^{-1} = S^*$ egyenlőség, speciálisan $\operatorname{ran} B^* = \operatorname{dom}(S^*)$, ezért $B^*(TS)^*y \in \operatorname{dom}(S^*)$. Ezzel azt kaptuk, hogy $T^*y \in \operatorname{dom}(S^*)$, ami éppen azt jelenti, hogy $y \in \operatorname{dom}(S^*T^*)$. ■

11.16. Következmény. *Legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn értelmezett lineáris operátor és legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan operátorok, hogy $0 \notin \operatorname{Sp}(B)$, akkor ATB is sűrűn értelmezett és*

$$(ATB)^* = B^*T^*A^*.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló a 11.12 és 11.15 Állítások alapján. ■

11.3. Zárt és lezárható operátorok

Emlékeztetünk rá, hogy ha $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, akkor azok $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ Descartes-szorzata maga is Hilbert-tér, éspedig az alábbi

$$((x, y) \,|\, (x', y')) := (x \,|\, x') + (y \,|\, y'), \qquad x, x' \in \mathcal{H}, y, y' \in \mathcal{K}$$

skaláris szorzattal. Az alábbiakban a $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$-beli metrikus és geometriai fogalmak mindenütt ebben a skaláris szorzat által indukált Hilbert-tér struktúrában értendők.

11.17. Definíció. Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, akkor egy $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ lineáris operátort *zárt operátornak* nevezünk, ha annak

$$G(T) := \{(x, Tx) \,|\, x \in \operatorname{dom}(T)\}$$

gráfja zárt $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$-ban.

Vegyük észre, hogy egy T lineáris operátor $G(T)$ gráfja a szorzattér egy lineáris altere, így egy zárt operátor gráfja a szorzat Hilbert-tér zárt lineáris altere. Következésképp $G(T)$ maga is Hilbert-tér, éspedig az alábbi

$$((x, Tx) \,|\, (x', Tx'))_T := (x \,|\, x') + (Tx \,|\, Tx'), \qquad x, x' \in \operatorname{dom}(T)$$

ún. gráf skaláris szorzattal.

Egyszerűen ellenőrizhető egy operátor zártságának alábbi sorozatokkal való jellemzése:

11.18. Állítás. *Egy $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ operátor pontosan akkor zárt, ha bármely* $\operatorname{dom}(T)$*-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, illetve $x \in \mathcal{H}$ és $y \in \mathcal{K}$ vektorokra $x_n \to x$ és $Tx_n \to y$ esetén fennáll, hogy $x \in \operatorname{dom}(T)$ és $Tx = y$.*

A 11.18 Állítás felhasználásával igazolható az alábbi fontos

11.19. Tétel. *Bármely sűrűn definiált lineáris operátor adjungáltja zárt operátor.*

Bizonyítás. Legyen T sűrűn definiált lineáris operátor a $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek között, legyen továbbá $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\operatorname{dom}(T^*)$-ban haladó sorozat, hogy $y_n \to y$ és $T^*y_n \to z$ valamely $y \in \mathcal{K}$ és $z \in \mathcal{H}$ vektorokra. Akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \operatorname{dom}(T)$ esetén fennáll, hogy

$$(Tx \,|\, y_n) = (x \,|\, T^*y_n),$$

ahol $(Tx \,|\, y_n) \to (Tx \,|\, y)$ és $(x \,|\, T^*y_n) \to (x \,|\, z)$, következésképp

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, z), \qquad x \in \operatorname{dom}(T),$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $y \in \operatorname{dom}(T^*)$ és $T^*y = z$, vagyis T^* zárt operátor. ■

11.20. Megjegyzés. A zárt operátorokkal kapcsolatos egyik legfontosabb eredmény a 6.24 Banach-féle zárt gráf tétel, mely szerint egy Banach-téren értelmezett és Banach-térbe képező zárt operátor mindig korlátos. Ez azonban nem jelenti azt, hogy egy sűrűn definiált lineáris operátor adjungáltja automatikusan folytonos lenne, ui. az adjungált operátor értelmezési tartománya általában nem zárt, vagyis nem Banach-tér, ezért arra a zárt gráf tétel nem alkalmazható.

11.21. Állítás. *Egy $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ a $\mathcal{H}$-n mindenütt értelmezett lineáris operátor adjungáltja mindig folytonos.*

Bizonyítás. Rögzített $y \in \operatorname{dom}(T^*)$, $\|y\| \le 1$ mellett vezessük be a

$$\varphi_y(x) := (Tx \,|\, y), \qquad x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $\varphi_y : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált, akkor $y \in \operatorname{dom}(T^*)$ miatt φ_y folytonos és normájára fennáll, hogy

$$\|\varphi_y\| = \|T^*y\|.$$

Másfelől bármely $x \in \mathcal{H}$ mellett $|\varphi_y(x)| \le \|Tx\|$, vagyis

$$\sup_{y\in\mathrm{dom}(T^*),\|y\|\le 1} |\varphi_y(x)| \le \|Tx\|, \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

ami azt jelenti, hogy a $\{\varphi_y \,|\, y \in \mathrm{dom}(T^*), \|y\| \le 1\}$ a $\mathcal{H}$-n értelmezett folytonos lineáris funkcionálok olyan rendszere, amely pontonként korlátos. A 6.12 Banach egyenletes korlátosság tétele szerint fennáll, hogy

$$\sup_{y\in\mathrm{dom}(T^*),\|y\|\le 1} \|\varphi_y\| < +\infty,$$

vagyis $\|\varphi_y\| = \|T^*y\|$ figyelembevételével

$$\sup_{y\in\mathrm{dom}(T^*),\|y\|\le 1} \|T^*y\| < +\infty,$$

ami pedig éppen azt jelenti, hogy T^* korlátos. ∎

A későbbiekben (többek között a következő tételben is) alapvető szerepet játszik az alábbi

$$W(x,y) := (y,-x), \qquad x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K} \tag{11.4}$$

egyenlőséggel értelmezett $W : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \times \mathcal{H}$ operátor. Világos, hogy W bijektív és izometrikus, következésképp W unitér operátor:

$$W^* = W^{-1}.$$

11.22. Tétel. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor, akkor T^* gráfjára fennáll, hogy*

$$G(T^*) = [W\langle G(T)\rangle]^{\perp}. \tag{11.5}$$

Bizonyítás. Legyen először $(y, T^*y) \in G(T^*)$, vagyis $y \in \mathrm{dom}(T^*)$, akkor tetszőleges $x \in \mathrm{dom}(T)$ mellett

$$(y \,|\, Tx) = (T^*y \,|\, x),$$

vagyis

$$0 = (y \,|\, Tx) - (T^*y \,|\, x) = ((y, T^*y) \,|\, (Tx, -x)) = ((y, T^*y) \,|\, W(x, Tx)).$$

Következésképp kapjuk, hogy $(y, T^*y) \in [W\langle G(T)\rangle]^{\perp}$, amivel a $G(T^*) \subseteq [W\langle G(T)\rangle]^{\perp}$ tartalmazást beláttuk. Megfordítva tegyük fel, hogy $(y, w) \in [W\langle G(T)\rangle]^{\perp}$ valamely $y \in \mathcal{K}$ és $w \in \mathcal{H}$ vektorokra, akkor a fentihez hasonlóan bármely $x \in \mathrm{dom}(T)$ vektor esetén

$$0 = ((y, w) \,|\, W(x, Tx)) = ((y, w) \,|\, (Tx, -x)) = (y \,|\, Tx) - (w \,|\, x),$$

amiből átrendezés után kapjuk, hogy

$$(Tx \,|\, y) = (x \,|\, w), \qquad x \in \mathrm{dom}(T),$$

következésképp kapjuk, hogy $y \in \mathrm{dom}(T^*)$ és $T^*y = w$. Ezzel megmutattuk, hogy

$$(y, w) = (y, T^*y) \in G(T^*),$$

amivel a $[W\langle G(T)\rangle]^{\perp} \subseteq G(T^*)$ tartalmazást és egyúttal a tételt is beláttuk. ∎

11.23. Definíció. Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, akkor egy $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ lineáris operátor *lezárhatónak* nevezünk, ha létezik olyan $S : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ zárt operátor, amely a T kiterjesztése.

A gráf értelmezése alapján világos, hogy S pontosan akkor kiterjesztése T-nek, ha $G(T) \subseteq G(S)$. Ha S zárt kiterjesztése T-nek, akkor világos, hogy egyúttal

$$\overline{G(T)} \subseteq G(S),$$

ami azt jelenti, hogy a $\overline{G(T)}$ reláció valamely $\bar{T} : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ (szükségképp zárt) lineáris operátor gráfja:

$$G(\bar{T}) = \overline{G(T)}.$$

Továbbá a lezárás operáció érelemezése alapján az is világos, hogy $S = \bar{T}$ a tartalmazás tekintetében legkisebb olyan zárt operátor, amely T kiterjesztése. Ezt a $\bar{T}$ zárt operátort nevezzük a T operátor *lezártjának*.

Könnyen ellenőrizhető egy operátor lezárhatóságának alábbi sorozatokkal való jellemzése:

11.24. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, akkor egy $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ lineáris operátor pontosan akkor lezárható, ha bármely* $\operatorname{dom}(T)$*-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra, illetve $y \in \mathcal{K}$ vektorra $x_n \to 0$ és $Tx_n \to y$ esetén $y = 0$ teljesül.*

A következő tételben az adjungált fogalmának segítségével jellemzést adunk egy sűrűn definiált operátor lezárhatóságára:

11.25. Tétel. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, legyen továbbá $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ egy sűrűn értelmezett lineáris operátor.*

(a) *T pontosan akkor lezárható, ha az adjungáltja sűrűn értelmezett, azaz*

$$[\operatorname{dom}(T^*)]^\perp = \{0\}.$$

(b) *Ha T lezárható, akkor lezártjára fennáll, hogy*

$$\bar{T} = T^{**}.$$

Bizonyítás. (a) Tegyük fel először, hogy T és annak T^* adjungáltja is sűrűn értelmezettek, akkor tekinthetjük a $T^{**} := (T^*)^*$ második adjungált operátort. Ha pedig $x \in \operatorname{dom}(T)$, akkor bármely $y \in \operatorname{dom}(T^*)$ vektor mellett fennáll, hogy

$$(T^*y \,|\, x) = (y \,|\, Tx),$$

ami azt jelenti, hogy $x \in \operatorname{dom}(T^{**})$ és $T^{**}x = Tx$. Ezzel megmutattuk, hogy T^{**} kiterjeszti a T operátort. Mivel a 11.19 Tétel szerint egy adjungált operátor mindig zárt, azért T^{**} zárt kiterjesztése T-nek, következésképp T lezárható és fennáll, hogy

$$\bar{T} \subset T^{**}. \tag{11.6}$$

Megfordítva tegyük fel, hogy T sűrűn definiált lezárható operátor és legyen S a T egy zárt kiterjesztése. Legyen $v \in [\operatorname{dom}(T^*)]^\perp$, akkor bármely $y \in \operatorname{dom}(T^*)$ vektorra

$$((v, 0) \,|\, (y, T^*y)) = 0,$$

következésképp a 11.22 Tétel figyelembevételével és annak jelöléseivel kapjuk, hogy

$$(v, 0) \in G(T^*) = [W\langle G(T)\rangle]^{\perp\perp} = \overline{W\langle G(T)\rangle} \subseteq W\langle G(S)\rangle.$$

Létezik tehát olyan $u \in \operatorname{dom}(S)$ vektor, amelyre $(v, 0)$ előáll

$$(v, 0) = W(u, Su) = (Su, -u),$$

alakban, következésképp $u = 0$ és $v = Su = 0$. Ezzel beláttuk, hogy $[\mathrm{dom}(T^*)]^\perp = \{0\}$, vagyis T^* sűrűn definiált.

(b) Vezessük be az alábbi

$$V(y,x) := (x,-y), \qquad x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$$

egyenlőséggel definiált $V : \mathcal{K} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ lineáris operátort. A bizonyítás első fele alapján T^* sűrűn definiált és a 11.22 Tétel értelmében fennáll, hogy

$$G(T^{**}) = [V\langle G(T^*)\rangle]^\perp, \qquad G(T^*) = [W\langle G(T)\rangle]^\perp,$$

ahol W a (11.4) alatti operátor. Könnyen ellenőrizhető, hogy $V = -W^{-1}$, továbbá bármely $X \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ és $Y \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{H}$ halmazok esetén

$$W\langle X^\perp\rangle = [W\langle X\rangle]^\perp, \qquad V\langle Y^\perp\rangle = [V\langle Y\rangle]^\perp.$$

Ezek felhasználásával

$$G(T^{**}) = [V\langle G(T^*)\rangle]^\perp = \left[V\left\langle [W\langle G(T)\rangle]^\perp\right\rangle\right]^\perp = V\langle W\langle G(T)^{\perp\perp}\rangle\rangle = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)},$$

vagyis $G(T^{**}) = G(\bar{T})$, ami viszont ekvivalens azzal, hogy $T^{**} = \bar{T}$. ■

A fenti tétel egyszerű alkalmazásaként nyerjük az alábbi eredményt:

11.26. Tétel. *Egy $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátor esetén fennáll, hogy*

$$T^{**} = T,$$

továbbá $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ előáll

$$\mathcal{H} \times \mathcal{K} = G(T) \oplus V\langle G(T^*)\rangle \tag{11.7}$$

ortogonális direkt összeg alakban, ahol $V : \mathcal{K} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ a $V(y,x) := (x,-y)$ egyenlőséggel értelmezett operátor.

Bizonyítás. A $T^{**} = T$ egyenlőség nyilvánvaló az előző tételből. Másfelől a 11.22 Tétel szerint fennáll a

$$G(T^{**}) = [V\langle G(T^*)\rangle]^\perp$$

egyenlőség, amiből $G(T) = G(T^{**})$ figyelembevételével (11.7) már következik. ■

11.27. Következmény. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lezárható operátor, akkor $T^{***} = T^*$.*

Bizonyítás. Ha T lezárható, akkor T^* sűrűn definált zárt operátor, ezért az előző Tétel értelmében $T^* = (T^*)^{**}$. ■

11.28. Következmény. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ egy sűrűn definiált zárt lineáris operátor. Bármely $u \in \mathcal{H}$ és $v \in \mathcal{K}$ vektorok esetén egyértelműen léteznek olyan $x \in \mathrm{dom}(T)$ és $y \in \mathrm{dom}(T^*)$ vektorok, hogy*

$$u = x + T^*y \qquad \text{és} \qquad v = Tx - y.$$

Bizonyítás. Az előző Tétel szerint bármely $(u,v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ párhoz egyértelműen léteznek olyan $x \in \mathrm{dom}(T)$ és $y \in \mathrm{dom}(T^*)$ vektorok, amelyekre fennáll az

$$(u,v) = (x,Tx) + V(y,T^*y) = (x,Tx) + (T^*y,-y) = (x+T^*y, Tx-y)$$

egyenlőség, vagyis valóban $u = x + T^*y$ és $v = Tx - y$. ■

A fenti következmény egy érdekes alkalmazását mutatja be az alábbi

11.29. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ egy sűrűn értelmezett zárt operátor. Ha fennáll, hogy*

$$\operatorname{ran}(T^*) \subseteq \operatorname{dom}(T),$$

akkor T a $\mathcal{H}$-n mindenütt értelmezett korlátos operátor.

Bizonyítás. A zárt gráf tétel értelmében elég azt megmutatnunk, hogy $\operatorname{dom}(T) = \mathcal{H}$. Legyen $u \in \mathcal{H}$, akkor a 11.28 Következmény szerint léteznek olyan $x \in \operatorname{dom}(T)$ és $y \in \operatorname{dom}(T^*)$ vektorok, hogy u előáll $u = x + T^*y$ alakban. Akkor $T^*y \in \operatorname{ran}(T^*)$ miatt egyúttal $T^*y \in \operatorname{dom}(T)$, amiből pedig következik, hogy $u \in \operatorname{dom}(T)$. ■

11.4. Szimmetrikus és önadjungált operátorok

11.30. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor egy $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ (nem feltétlenül sűrűn definiált) lineáris operátort *szimmetrikusnak* nevezünk, ha eleget tesz az

$$(Sx \,|\, y) = (x \,|\, Sy), \qquad x, y \in \operatorname{dom}(S) \tag{11.8}$$

azonosságnak.

A korlátos esettel analóg módon igazolható, hogy ha $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, akkor egy $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha a kvadratikus alakja valós, vagyis a

$$q_S(x) \coloneqq (Sx \,|\, x), \qquad x \in \operatorname{dom}(S)$$

leképezés valós értékű.

11.31. Állítás. *Egy $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált lineáris operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha az adjungáltja kiterjeszti, azaz $S \subset S^*$.*

Bizonyítás. Ha S szimmetrikus és sűrűn definiált, akkor a (11.8) egyenlőségből leolvasható, hogy minden $y \in \operatorname{dom}(S)$ vektorra egyúttal $y \in \operatorname{dom}(S^*)$ és $S^*y = Sy$, vagyis S^* kiterjesztése S-nek. Megfordítva, ha $S \subset S^*$, akkor minden $y \in \operatorname{dom}(S)$ vektorra fennáll, hogy $y \in \operatorname{dom}(S^*)$ és $S^*y = Sy$, ezért az adjugnált értelmezése folytán minden $x \in \operatorname{dom}(S)$ vektorra

$$(Sx \,|\, y) = (x \,|\, S^*y) = (x \,|\, Sy),$$

vagyis S szimmetrikus. ■

11.32. Következmény. *Minden sűrűn definiált szimmetrikus operátor lezárható és lezártja maga is szimmetrikus operátor.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint S^* egy zárt kiterjesztése S-nek, következésképp S lezárható. Másfelől a 11.25 Tétel (b) szerint S lezárása megegyezik az S^{**} második adjungálttal, így $S^{**} \subseteq S^*$. Mivel $S^* = S^{***}$, azért $S^{**} \subset S^{***}$, ami az előző tétel értelmében azt jelenti, hogy S^{**} szimmetrikus. ■

11.33. Hellinger–Toeplitz-tétel. *Egy Hilbert-téren mindenütt definiált szimmetrikus operátor folytonos és önadjungált.*

Bizonyítás. Az előzőek szerint egy $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mindenütt értelmezett szimmetrikus operátor lezárható, következésképp zárt operátor, így a Banach-féle zárt gráf tétel szerint folytonos. ■

Az alábbi példa mutatja, hogy a 11.32 Következményben az S sűrűn értelmezettsége lényeges feltétel, ui. léteznek (nem sűrűn értelmezett) nem lezárható szimmetrikus operátorok is.

11.34. Példa. Legyen $\mathcal{H}$ egy szeparábilis Hilbert-tér és legyenek $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(f_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ mindketten teljes $\mathcal{H}$-beli ortonormált rendszerek. Jelölje D az $\{f_{n,m} \,|\, n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$ vektorrendszer által kifeszített lineáris alteret és tekintsük azt az $S : D \times \{0\} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ lineáris operátort, amelyet n, m indexek esetén az

$$S(f_{n,m}, 0) := (0, e_n)$$

egyenlőséggel értelmezünk. A $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ feletti skalárszorzat értelmezéséből nyilvánvaló a $\operatorname{ran} S \subseteq [\operatorname{dom}(S)]^{\perp}$ tartalmazás, és ezért

$$(Su \,|\, v) = (v \,|\, Su) = 0, \qquad u, v \in \operatorname{dom}(S),$$

következésképp S szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy S nem lezárható. Legyen ui. rögzített $m \geq 1$ index mellett

$$x_m := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (f_{0,m}, 0).$$

Világos, hogy $x_m \in \operatorname{dom}(S)$, illetve $\|x_m\| = \frac{1}{\sqrt{m}}$, és ezért $x_m \to 0$. Másrészt

$$Sx_m = (0, e_0),$$

vagyis $Sx_m \to (0, e_0)$, amennyiben $m \to \infty$, vagyis S nem lezárható.

11.35. Definíció. Az $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált lineáris operátort *önadjungáltnak* nevezzük, ha $S = S^*$.

A 11.31 Állítás alapján minden önadjungált operátor szimmetrikus, azonban ennek megfordítása nem igaz.

11.36. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ szürjektív szimmetrikus operátor, akkor S sűrűn definiált és önadjungált, emellett S injektív és $S^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ önadjungált operátor.*

Bizonyítás. Elsőként belátjuk, hogy S sűrűn értelmezett: legyen ui. $v \in [\operatorname{dom}(S)]^{\perp}$ egy tetszőleges vektor, akkor a feltétel szerint létezik $u \in \operatorname{dom}(S)$, amelyre $Su = v$. Ekkor minden $x \in \operatorname{dom}(S)$ esetén fennáll, hogy

$$0 = (x \,|\, v) = (x \,|\, Su) = (Sx \,|\, u),$$

vagyis $u \in [\operatorname{ran}(S)]^{\perp}$, amiből $\operatorname{ran}(S) = \mathcal{H}$ figyelembevételével $u = 0$ és egyúttal $v = Su = 0$ következik. Ezzel megmutattuk, hogy S sűrűn definiált szimmetrikus operátor. A 11.31 Állítás szerint tehát $S \subset S^*$, így az önadjungáltság igazolásához elég azt igazolnunk, hogy $\operatorname{dom}(S^*) \subseteq \operatorname{dom}(S)$. Legyen $y \in \operatorname{dom}(S^*)$, akkor ismét S szürjektivitását használva létezik olyan $u \in \operatorname{dom}(S)$, hogy $Su = S^*y$, amiből kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{dom}(S)$ mellett

$$0 = (x \,|\, S^*y) - (x \,|\, Su) = (Sx \,|\, y - u),$$

vagyis $y = u$. Ezzel megmutattuk, hogy $\operatorname{dom}(S^*) \subseteq \operatorname{dom}(S)$, amiből már következik, hogy S önadjungált.

Végezetül vegyük észre, hogy a $\ker(S) = [\operatorname{ran}(S^*)]^\perp$ egyenlőség folytán $S = S^*$ figyelembevételével kapjuk, hogy S injektív, és S^{-1} önadjungált, ui. a 11.14 Lemma szerint

$$(S^{-1})^* = (S^*)^{-1} = S^{-1}.$$

A Hellinger–Toeplitz-tétel szerint pedig S^{-1} korlátos, hiszen S^{-1} a $\mathcal{H}$-n mindenütt értelmezett szimmetrikus operátor. ■

11.37. Következmény. *Legyen $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ szimmetrikus operátor. Ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $\operatorname{ran}(S + cI) = \mathcal{H}$, akkor S önadjungált.*

Bizonyítás. Világos, hogy S-sel együtt $S + cI$ is szimmetrikus operátor, így az előző állítás szerint $S + cI$ önadjungált. Az 11.11 Állítás szerint S önadjungált. ■

Figyeljük meg, hogy a 11.36 Állítás és a 11.37 Következmény feltételei közt nem szerepel az S szimmetrikus operátor értelmezési tartományának sűrűsége, épp ellenkezőleg, a többi feltétel következményeképp adódik.

A nemkorlátos operátorok elméletének egyik legfontosabb alaptétele az alábbi Neumann Jánostól származó eredmény:

11.38. Tétel. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátor. Ekkor T^*T önadjungált, továbbá $(I + T^*T)^{-1}$ és $T(I + T^*T)^{-1}$ mindketten mindenütt definiált korlátos operátorok.*

Bizonyítás. A T operátor zártsága miatt $G(T)$ Hilbert-tér, továbbá az alábbi

$$V(x, Tx) \coloneqq x, \qquad x \in \operatorname{dom}(T)$$

egyenlőséggel definiált $V : G(T) \to \mathcal{H}$ operátor korlátos, éspedig $\|V\| \leq 1$, továbbá az is nyilvánvaló, hogy V injektív. Tekintsük a $VV^* \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátort, akkor világos, hogy bármely $y \in \mathcal{H}$ esetén $VV^*y \in \operatorname{ran} V = \operatorname{dom} T$, továbbá minden $x \in \operatorname{dom}(T)$ vektor mellett

$$\begin{aligned}
(Tx \,|\, TVV^*y) &= \Big((x, Tx) \,\Big|\, (VV^*y, TVV^*y)\Big)_T - (x \,|\, VV^*y) \\
&= (V^{-1}x \,|\, V^{-1}VV^*y)_T - (x \,|\, VV^*y) \\
&= (V^{-1}x \,|\, V^*y)_T - (x \,|\, VV^*y) \\
&= (x \,|\, y) - (x \,|\, VV^*y) \\
&= (x \,|\, y - VV^*y),
\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy bármely $y \in \mathcal{H}$ esetén $TVV^*y \in \operatorname{dom}(T^*)$ és

$$T^*TVV^*y = y - VV^*y.$$

Ezt átrendezve nyerjük, hogy

$$(I + T^*T)VV^*y = y, \qquad y \in \mathcal{H} \tag{11.9}$$

amiből már látható, hogy $I + T^*T$ szürjektív szimmetrikus operátor, következésképp önadjungált és $(I + T^*T)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. A (11.9) formulából az is leolvasható, hogy VV^* jobbinverze az $I + T^*T$ operátornak, másfelől

$$VV^*(I + T^*T) \subset [(I + T^*T)VV^*]^* = I,$$

vagyis VV^* balinverze is $(I+T^*T)$-nek, következésképp

$$(I+T^*T)^{-1} = VV^*.$$

Végül tekintsük a

$$W(x,Tx) \coloneqq Tx, \qquad x \in \operatorname{dom}(T)$$

egyenlőséggel definiált $W : G(T) \to \mathcal{K}$ operátort akkor $\|W\| \le 1$, emellett fennáll a $T = WV^{-1}$ egyenlőség. Következésképp kapjuk, hogy

$$WV^* = (WV^{-1})(VV^*) = T(I+T^*T)^{-1},$$

vagyis $T(I+T^*T)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$ és

$$\|T(I+T^*T)^{-1}\| \le \|W\|\|V^*\| \le 1,$$

amivel a tételt igazoltuk. ■

11.39. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátor, emellett jelölje S a T operátor* $\operatorname{dom}(T^*T)$*-re vett megszorítását:*

$$S \coloneqq T|_{\operatorname{dom}(T^*T)}.$$

Akkor $\bar{S} = S^{**} = T$.

Bizonyítás. Az $\bar{S} = S^{**}$ egyenlőség következik abból, hogy S sűrűn definiált és lezárható, az $\bar{S} = T$ egyenlőség pedig azzal ekvivalens, hogy

$$\overline{G(S)} = G(T). \tag{11.10}$$

Ennek az egyenlőségnek az igazolásához felhasználjuk a 11.38 Tétel bizonyításának jelöléseit. Mivel $V : G(T) \to \mathcal{H}$ injektív, azért

$$[\operatorname{ran} V^*]^\perp = \ker V = \{(0,0)\},$$

vagyis $\operatorname{ran} V^* \subseteq G(T)$ sűrű. Megmutatjuk, hogy

$$G(S) = \operatorname{ran} V^*, \tag{11.11}$$

amiből (11.10) már következik. Legyen ui. $u \in \mathcal{H}$, akkor $V^*u \in G(T)$, ezért létezik olyan $x \in \operatorname{dom}(T)$, hogy $V^*u = (x,Tx)$, de akkor

$$x = V(x,Tx) = VV^*u$$

figyelembevételével $x \in \operatorname{ran} VV^* = \operatorname{dom}(T^*T)$, vagyis $x \in \operatorname{dom}(S)$. Következésképp,

$$V^*u = (x,Tx) = (x,Sx) \in G(S),$$

amivel a $\operatorname{ran} V^* \subseteq G(S)$ tartalmazást igazoltuk. Megfordítva legyen $x \in \operatorname{dom}(S)$, akkor $\operatorname{dom}(S) = \operatorname{ran} VV^*$ figyelembevételével x előáll $x = VV^*u$ alakban valamely $u \in \mathcal{H}$ mellett, és fennáll, hogy

$$V(x,Sx) = x = VV^*u.$$

Mivel V injektív, azért $(x,Sx) = V^*u$, vagyis $(x,Sx) \in \operatorname{ran} V^*$, amivel a $G(S) \subseteq \operatorname{ran} V^*$ tartalmazást is igazoltuk. ■

11.40. Következmény. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátor, akkor* $\operatorname{ran}(I+T^*T)^{-1} = \operatorname{dom} T^*T$ *és* $\operatorname{ran} T(I+T^*T)^{-1} = \operatorname{ran} T \cap \operatorname{dom} T^*$*.*

Bizonyítás. A $\operatorname{ran}(I+T^*T)^{-1} = \operatorname{dom} T^*T$ egyenlőség nyilvánvaló. A második képtér egyenlőség igazolásához használjuk fel a

$$T(I+T^*T)^{-1} = WV^*$$

faktorizációt. A (11.11) egyenlőségben igazoltuk, hogy

$$\operatorname{ran} V^* = \{(x, Tx) \mid x \in \operatorname{dom} T^*T\}, \tag{11.12}$$

amiből kapjuk, hogy

$$\operatorname{ran} T(I+T^*T)^{-1} = W\langle \operatorname{ran} V^* \rangle = \{Tx \mid x \in \operatorname{dom} T^*T\},$$

amiből már leolvasható a $\operatorname{ran} T(I+T^*T)^{-1} = \operatorname{ran} T \cap \operatorname{dom} T^*$ egyenlőség. ■

Az operátorok szorzatának értelmezése alapján világos, hogy bármely sűrűn értelmezett operátor esetén fennáll a $\operatorname{dom}(T^*T) \subseteq \operatorname{dom}(T)$ tartalmazás, a fentiekben pedig igazoltuk, hogy ha T zárt, akkor $\operatorname{dom}(T^*T)$ továbbra is sűrű altér $\mathcal{H}$-ban. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ha T nem korlátos, akkor a $\operatorname{dom}(T^*T) \subseteq \operatorname{dom}(T)$ tartalmazás valódi:

11.41. Állítás. *Legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ olyan sűrűn definiált zárt operátor, hogy*

$$\operatorname{dom}(T^*T) = \operatorname{dom}(T),$$

akkor $\operatorname{dom}(T) = \mathcal{H}$ *és* $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$.

Bizonyítás. A $\operatorname{dom}(T^*T) = \operatorname{dom}(T)$ egyenlőség azt jelenti, hogy bármely $x \in \operatorname{dom}(T)$ esetén $Tx \in \operatorname{dom}(T^*)$, vagyis fennáll a

$$\operatorname{ran} T \subseteq \operatorname{dom}(T^*)$$

tartalmazás. A 11.29 Állítást T-helyett a T^* sűrűn definiált zárt operátorra alkalmazva kapjuk, hogy $T^* \in \mathscr{B}(\mathcal{K};\mathcal{H})$, következésképp $T = T^{**} \in \mathscr{B}(\mathcal{H};\mathcal{K})$. ■

A 11.43 Tétel közvetlen következményeképp adódik, hogy ha T sűrűn definiált zárt operátor, akkor T^*T és TT^* mindketten önadjungált operátorok a $\mathcal{H}$, illetve $\mathcal{K}$ Hilbert-terekben. Ennek a megfordítása is igaz: ha T^*T és TT^* mindketten önadjungáltak, akkor T szükségképpen zárt operátor.

11.42. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $S, T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált operátorok, hogy $S \subseteq T$. Ha S önadjungált, T pedig szimmetrikus, akkor $T = S$. (Vagyis önadjungált operátornak nem létezik valódi szimmetrikus kiterjesztése.)*

Bizonyítás. Az $S \subseteq T$ feltételből következik, hogy $T^* \subseteq S^*$, ahol $S = S^*$ és T szimmetrikussága miatt $T \subseteq T^*$, következésképp $T \subseteq S$, vagyis $T = S$. ■

11.43. Tétel. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor, akkor T pontosan akkor zárt, ha T^*T és TT^* mindketten önadjungált operátorok.*

Bizonyítás. Ha T sűrűn definiált zárt operátor, akkor T^* is sűrűn definiált és zárt, illetve fennáll a $T^{**} = T$ egyenlőség. A 11.38 Tételt a T, illetve T^* operátorokra alkalmazva kapjuk, hogy T^*T és TT^* mindeketten önadjungáltak.

Megfordítva tegyük fel, hogy T^*T és TT^* mindketten önadjungált operátorok, akkor TT^* önadjungáltságából következik, hogy T^* sűrűn definiált, és ezért T lezárható operátor. Emiatt elegendő a $\operatorname{dom}(T^{**}) \subseteq \operatorname{dom}(T)$ tartalmazást igazolnunk. A 11.38 Tétel szerint T^*T^{**} és $T^{**}T^*$ mindketten olyan önadjungált operátorok, hogy $\operatorname{ran}(I + T^*T^{**}) = \mathcal{H}$ és

$\operatorname{ran}(I + T^{**}T^*) = \mathcal{K}$, továbbá $T^*T \subseteq T^*T^{**}$ és $TT^* \subseteq T^{**}T^*$. A 11.42 Lemma szerint önadjungált operátornak nem létezik valódi szimmetrikus kiterjesztése, ezért

$$T^*T = T^*T^{**}, \qquad \text{illetve} \qquad T^{**}T^* = TT^*,$$

és emellett

$$\operatorname{ran}(I + T^*T) = \mathcal{H}, \qquad \text{illetve} \qquad \operatorname{ran}(I + TT^*) = \mathcal{K}. \tag{11.13}$$

Rögzítsünk egy $z \in \operatorname{dom}(T^{**})$ vektort, akkor (11.13) figyelembevételével léteznek olyan $u \in \operatorname{dom}(T^*T)$ és $v \in \operatorname{dom}(TT^*)$ vektorok, hogy

$$z = u + T^*Tu, \qquad \text{és} \qquad T^{**}z = v + TT^*v. \tag{11.14}$$

Minthogy $u, z \in \operatorname{dom} T^{**}$, ezért egyúttal $T^*Tu \in \operatorname{dom}(T^{**})$ és

$$T^{**}z = T^{**}(u + T^*Tu) = T^{**}u + T^{**}T^*Tu,$$

amiből $T^{**}T^* = TT^*$ és $u \in \operatorname{dom} T$ figyelembevételével

$$T^{**}z = Tu + TT^*Tu$$

egyenlőség adódik. Ebből, és (11.14) második azonosságának figyelembevételével kapjuk, hogy

$$0 = Tu + TT^*Tu - v - TT^*v = (Tu - v) + TT^*(Tu - v),$$

azaz $(I + TT^*)(Tu - v) = 0$. Ugyanakkor a 11.38 Tétel szerint $I + TT^*$ injektív operátor, ezért $Tu = v$. Ismét (11.14) alapján

$$z - u = T^*Tu = T^*v,$$

ahol $v \in \operatorname{dom}(TT^*)$ miatt $T^*v \in \operatorname{dom}(T)$, ezért $z - u \in \operatorname{dom}(T)$. Minthogy egyúttal $u \in \operatorname{dom}(T)$ is teljesül, ezért $z = (z - u) + u \in \operatorname{dom}(T)$, amivel a $\operatorname{dom}(T^{**}) \subseteq \operatorname{dom}(T)$ tartalmazást, és vele együtt a tételt is igazoltuk. ■

11.5. Operátor mátrix technikák

Legyenek $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, illetve $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ Hilbert-terek, emellett legyenek $A : \mathcal{H}_1 \rightarrowtail \mathcal{K}_1$, $B : \mathcal{H}_2 \rightarrowtail \mathcal{K}_1$, $C : \mathcal{H}_1 \rightarrowtail \mathcal{K}_2$, és $D : \mathcal{H}_2 \rightarrowtail \mathcal{K}_2$ lineáris operátorok, akkor az

$$M(x, y) \coloneqq (Ax + By, Cx + Dy), \qquad x \in \operatorname{dom}(A) \cap \operatorname{dom}(C), y \in \operatorname{dom}(B) \cap \operatorname{dom}(D)$$

egyenlőséggel értelmezett $M : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrowtail \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ operátort az A, B, C, D által meghatározott operátormátrixnak nevezzük. A továbbiakban M-re a lineáris algebrában megszokott

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{11.15}$$

mátrix jelölést fogjuk alkalmazni, továbbá a (11.15) operátormátrixnak egy alkalmas (x, y) vektoron való hatását is a szemléletesebb „oszlopvektoros” jelölésmóddal írjuk:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \coloneqq \begin{bmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{bmatrix},$$

ahol $x \in \operatorname{dom}(A) \cap \operatorname{dom}(C)$ és $y \in \operatorname{dom}(B) \cap \operatorname{dom}(D)$.

Egyszerű számolás mutatja, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda A_{1,1} & \lambda A_{1,2} \\ \lambda A_{2,1} & \lambda A_{2,2} \end{bmatrix}$$

illetve alkalmas $A_{j,k}, B_{j,k}$, $j, k = 1, 2$, operátorok esetén

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \supset \begin{bmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & A_{1,2}+B_{1,2} \\ A_{2,1}+B_{2,1} & A_{2,2}+B_{2,2} \end{bmatrix},$$

valamint

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \supset \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1}+A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2}+A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1}+A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2}+A_{2,2}B_{2,2}. \end{bmatrix}$$

Itt általában egyik esetben sem mondható egyenlőség. Szintén egyszerűen ellenőrizhető az

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}^* \supset \begin{bmatrix} A_{1,1}^* & A_{2,1}^* \\ A_{1,2}^* & A_{2,2}^* \end{bmatrix}$$

reláció, feltéve, hogy a baloldalon álló adjungált értelmes. A tartalmazás általában itt is valódi, igaz azonban a következő

11.44. Állítás. *Legyenek $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, illetve $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ Hilbert-terek, $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{K}_1)$, $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{K}_2)$ folytonos lineáris operátorok, valamint legyenek $S : \mathcal{H}_2 \rightarrowtail \mathcal{K}_1$ és $T : \mathcal{H}_1 \rightarrowtail \mathcal{K}_2$ sűrűn definiált lineáris operátorok. Ekkor az*

$$M := \begin{bmatrix} A & S \\ T & B \end{bmatrix},$$

$M : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrowtail \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ operátor mátrix sűrűn definiált, és adjungáltjára fennáll az

$$M^* = \begin{bmatrix} A^* & T^* \\ S^* & B^* \end{bmatrix}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Az M értelmezése alapján $\operatorname{dom}(M) = \operatorname{dom}(T) \cap \operatorname{dom}(S)$, vagyis M sűrűn definiált, továbbá egyszerű ellenőrzés mutatja, hogy

$$M^* \supset \begin{bmatrix} A^* & T^* \\ S^* & B^* \end{bmatrix}.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy $(k_1, k_2) \in \operatorname{dom}(M^*)$ tetszőleges, azt kell megmutatnunk, hogy $k_1 \in \operatorname{dom}(S^*)$ és $k_2 \in \operatorname{dom}(T^*)$. Jelölje $(h_1, h_2) := M^*(k_1, k_2)$, akkor bármely $y \in \operatorname{dom}(S)$ esetén $(0, y) \in \operatorname{dom}(M)$, és ezért $M(0, y) = (Sy, By)$ figyelembevételével

$$((Sy, By) \,|\, (k_1, k_2)) = ((0, y) \,|\, (h_1, h_2)),$$

amit kifejtve kapjuk, hogy

$$(Sy \,|\, k_1) = (y \,|\, h_1) - (By \,|\, k_2) = (y \,|\, h_1 - B^* k_2),$$

következésképp $k_1 \in \operatorname{dom}(S^*)$ és $S^* k_1 = h_1 - B^* k_2$. Hasonlóan ellenőrizhető a $k_2 \in \operatorname{dom}(T^*)$ tartalmazás is. ■

Az alábbiakban legyenek $\mathcal{H}$, illetve $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, legyenek továbbá $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$, illetve $T : \mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátorok. A következőkben azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett garantált az

$$S^* = T$$

egyenlőség. Világos, hogy ennek szükséges (de nem elégséges) feltétele, hogy fennálljon az alábbi

$$(Sx \,|\, y) = (x \,|\, Ty), \qquad x \in \operatorname{dom}(S), y \in \operatorname{dom}(T) \tag{11.16}$$

azonosság, melyet a továbbiakban mindig felteszünk.

Vezessük be az alábbi

$$M_{S,T} := \begin{bmatrix} I & -T \\ S & I \end{bmatrix} \tag{11.17}$$

operátor mátrixot, ahol az egyszerűség kedvéért I jelöli mind a $\mathcal{H}$-beli, mind pedig a $\mathcal{K}$-beli identikus operátort. Tehát $M_{S,T} : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ az az operátor, amelyet a

$$\operatorname{dom}(M_{S,T}) = \operatorname{dom}(S) \times \operatorname{dom}(T)$$

altéren az

$$M_{S,T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x - Ty \\ Sx + y \end{bmatrix}$$

egyenlőséggel értelmezünk. Vezessük be emellett a

$$V \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \qquad x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K} \tag{11.18}$$

hozzárendeléssel definiált $V : \mathcal{K} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ segédoperátort.

11.45. Lemma. *Legyenek $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ és $T : \mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{H}$ (nem feltétlen sűrűn definiált) lineáris operátorok, melyek eleget tesznek a* (11.16) *azonosságnak. Ekkor*

$$G(S)^\perp \cap \operatorname{ran} M_{S,T} = V\langle G(T)\rangle.$$

Bizonyítás. A (11.16) azonosság alapján bármely $x \in \operatorname{dom}(S)$ és $y \in \operatorname{dom}(T)$ vektorra

$$((x, Sx) \,|\, V(y, Ty)) = ((x, Sx) \,|\, (Ty, -y)) = (x \,|\, Tx) - (Sx \,|\, y) = 0$$

teljesül, amiből következik, hogy $V\langle G(T)\rangle \subseteq G(S)^\perp$. Másfelől $y \in \operatorname{dom}(T)$ mellett

$$M_{S,T} \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -T \\ S & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ty \\ -y \end{bmatrix},$$

amiből kapjuk, hogy $V\langle G(T)\rangle \subseteq \operatorname{ran} M_{S,T}$, amivel megmutattuk, hogy fennáll a

$$V\langle G(T)\rangle \subseteq G(S)^\perp \cap \operatorname{ran} M_{S,T}$$

tartalmazás. Megfordítva tegyük fel, hogy $M_{S,T}(x, y) \in G(S)^\perp$ teljesül valamely $x \in \operatorname{dom}(S)$ és $y \in \operatorname{dom}(T)$ vektorokra, akkor (11.16) figyelembevételével

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\begin{bmatrix} x \\ Sx \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x - Ty \\ Sx + y \end{bmatrix} \right) \\ &= (x \,|\, x) + (Sx \,|\, y) - (x \,|\, Ty) + (Sx \,|\, Sx) \\ &= (x \,|\, x) + (Sx \,|\, Sx), \end{aligned}$$

amiből $x = 0$, és egyúttal $M_{S,T}(x, y) = M_{S,T}(0, y) = (-Ty, y) \in V\langle G(T)\rangle$ következik. ■

A következő tételben az $M_{S,T}$ operátormátrix segítségével szükséges és elégséges feltételt adunk az $S^* = T$ egyenlőségre. Figyeljük meg, hogy a tétel feltételrendszerében nem szerepel az S operátor értelmezési tartományának sűrűsége.

11.46. Tétel. *Legyenek* $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ *és* $T : \mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{H}$ *(nem feltétlen sűrűn definiált) lineáris operátorok, hogy*

$$(Sx \mid y) = (x \mid Ty), \qquad x \in \operatorname{dom}(S), y \in \operatorname{dom}(T),$$

akkor a következő kijelentések egyenértékűek:

(i) S *sűrűn definiált és* $S^* = T$*,*
(ii) $G(S)^\perp = V\langle G(T)\rangle$*,*
(iii) $G(S)^\perp \subseteq \operatorname{ran} M_{S,T}$*.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Tegyük fel először, hogy S sűrűn definiált és $S^* = T$, akkor a 11.22 Tétel szerint fennállnak a

$$G(S)^\perp = V\langle G(S^*)\rangle = V\langle G(S^*)\rangle$$

azonosságok, amiből az (i)⇒(ii) implikációt beláttuk.

(ii)⇒(iii): Az előző lemma alapján nyilvánvaló.

(iii)⇒(i): Elsőként azt vegyük észre, hogy az előző lemma alapján fennáll a következő azonosság:

$$G(S)^\perp = V\langle G(T)\rangle. \tag{11.19}$$

Megmutatjuk, hogy S sűrűn definiált: legyen ui. $u \in [\operatorname{dom}(S)]^\perp$, akkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy $(u, 0) \in G(S)^\perp$, ezért (11.19) alapján létezik $y \in \operatorname{dom}(T)$, hogy

$$(u, 0) = V(y, Ty) = (Ty, -y),$$

amiből $y = 0$ és $u = Ty = 0$ következik. Ezzel megmutattuk, hogy S sűrűn definiált, és S^* gráfjára

$$V\langle G(S^*)\rangle = G(S)^\perp = V\langle G(T)\rangle$$

teljesül, amiből a $T = S^*$ egyenlőség már következik. ■

A következő eredmény a 11.46 Tétel szimmetrikus változata: ebben arra a kérdést adunk választ, hogy adott S és T operátorok milyen feltétel mellett lesznek egymás adjungáltjai, vagyis mikor teljesülnek az $S^* = T$ és $T^* = S$ egyenlőségek.

11.47. Tétel. *Legyenek* $\mathcal{H}$ *és* $\mathcal{K}$ *valós vagy komplex Hilbert-terek és* $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$*, illetve* $T : \mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{H}$ *lineáris operátorok, hogy*

$$(Sx \mid y) = (x \mid Ty), \qquad x \in \operatorname{dom}(S), y \in \operatorname{dom}(T).$$

A következő kijelentések egyenértékűek:

(i) S *és* T *mindketten sűrűn definiáltak és* $S^* = T$*, illetve* $T^* = S$*,*
(ii) $\operatorname{ran} M_{S,T} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$*,*
(iii) $\operatorname{ran} M_{T,S} = \mathcal{K} \times \mathcal{H}$*,*
(iv) $\operatorname{ran}(I + ST) = \mathcal{K}$ *és* $\operatorname{ran}(I + TS) = \mathcal{H}$*,*
(v) $G(S)^\perp \subseteq \operatorname{ran} M_{S,T}$ *és* $G(T)^\perp \subseteq \operatorname{ran} M_{T,S}$*.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Legyenek $u \in \mathcal{H}$ és $v \in \mathcal{K}$ tetszőleges vektorok. A feltétel szerint $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátor, ezért a 11.28 Következmény szerint léteznek olyan $x \in \operatorname{dom}(S)$ és $y \in \operatorname{dom}(S^*)$ vektorok, hogy

$$(u, v) = (x + S^*y, Sx - y),$$

ezért $S^* = T$ figyelembevételével

$$M_{S,T}\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + Ty \\ Sx - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

vagyis $(u, v) \in \operatorname{ran} M_{S,T}$.

(ii)⇒(iii): Legyenek $u \in \mathcal{H}$ és $v \in \mathcal{K}$ tetszőleges vektorok, akkor (ii) szerint léteznek $x \in \operatorname{dom}(S)$ és $y \in \operatorname{dom}(T)$ vektorok, hogy

$$(-u, v) = M_{S,T}(x, y) = (x - Ty, Sx + y),$$

de akkor

$$M_{T,S}(y, -x) = (y + Sx, -x + Ty) = (v, u),$$

amivel megmutattuk, hogy $M_{T,S}$ szürjektív. Ugyanígy igazolható a (iii)⇒(ii) implikáció, vagyis (ii) és (iii) ekvivalensek.

(ii)⇒ (iv): Elsőként megmutatjuk, hogy $M_{S,T}$ mellett $M_{-S,-T}$ is szürjektív operátor. Valóban, legyenek $u \in \mathcal{H}$ és $v \in \mathcal{K}$ tetszőlegesek, akkor léteznek $x, y \in \mathcal{H}$ vektorok, hogy

$$(u, -v) = M_{S,T}(x, y) = (x - Ty, y + Sx),$$

akkor

$$M_{-S,-T}\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & T \\ -S & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - Ty \\ -Sx - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Ebből kapjuk, hogy $\operatorname{ran}(M_{S,T} \cdot M_{-S,-T}) = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$, továbbá egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy

$$M_{S,T} \cdot M_{-S,-T} = \begin{bmatrix} I & -T \\ S & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & T \\ -S & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + TS & 0 \\ 0 & I + ST \end{bmatrix}, \tag{11.20}$$

amiből következik, hogy $\operatorname{ran}(I + TS) = \mathcal{H}$ és $\operatorname{ran}(I + ST) = \mathcal{K}$.

(iv)⇒(v): A (11.20) faktorizációból kapjuk, hogy $\operatorname{ran} M_{S,T} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$, és a (ii)⇔(iii) ekvivalencia miatt egyúttal $\operatorname{ran} M_{T,S} = \mathcal{K} \times \mathcal{H}$, amiből az (v) alatti tartalmazások mindegyike triviálisan következik.

(v)⇒ (i): Nyilvánvaló a 11.46 Tételből. ■

A fenti tétel egy közvetlen alkalmazásaként a sűrűn definiált zárt operátorok alábbi jellemzését kapjuk:

11.48. Tétel. *Legyen T egy sűrűn definiált lineáris operátor a $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek között, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) *T zárt,*
(ii) *$\operatorname{ran} M_{T^*,T} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$,*
(iii) *$\operatorname{ran}(I + T^*T) = \mathcal{K}$ és $\operatorname{ran}(I + TT^*) = \mathcal{H}$,*
(iv) *$G(T^*)^\perp \subseteq \operatorname{ran} M_{T^*,T}$,*
(v) *T^* sűrűn definiált és $T^{**} = T$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Ha T sűrűn definiált zárt operátor, akkor a 11.26 Tétel szerint T^* sűrűn definiált és $T^{**} = T$, ezért T és $S := T^*$ eleget tesznek a 11.47 Tétel (i) feltételének, így a Tétel szerint $\operatorname{ran} M_{T,T^*} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ teljesül.

(ii)⇒(iii): Világos, hogy $S := T^*$ választással S és T eleget tesz a 11.47 Tétel (ii) feltételének, ezért a Tétel szerint $\operatorname{ran}(I + T^*T) = \mathcal{H}$ és $\operatorname{ran}(I + TT^*) = \mathcal{K}$.

(iii)⇒(iv): Következik a 11.47 Tétel (iv)⇒(v) implikációjából.
(iv)⇒(v): Következik a 11.46 Tétel (iii)⇒(i) implikációjából.
(v)⇒(i): Az adjungált operátor mindig zárt, így ha $T^{**} = T$, akkor T zárt. ■

A következőkben az $M_{S,T}$ operátormátrixot az önadjungált, illetve a ferdén önadjungált operátorok jellemzésére fogjuk alkalmazni.

11.49. Lemma. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ zárt lineáris operátor. Tegyük fel, hogy* $\operatorname{ran} T \subseteq \mathcal{K}$ *sűrű és létezik $\alpha > 0$, hogy*

$$\|Tx\| \geq \alpha\|x\|, \qquad x \in \operatorname{dom}(T),$$

akkor $\operatorname{ran} T = \mathcal{K}$ *és* $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$.

Bizonyítás. Világos, hogy a tett feltevések mellett $\ker T = \{0\}$. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{ran} T = \mathcal{K}$, amihez elég azt igazolnunk, hogy $\operatorname{ran} T$ zárt. Legyen $y \in \overline{\operatorname{ran} T}$ és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\operatorname{dom}(T)$-ben haladó sorozat, hogy $Tx_n \to y$. Ekkor bármely n, m esetén

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Tx_n - Tx_m\|,$$

amiből következik, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, és ezért $x_n \to x$ valamely $x \in \mathcal{H}$ vektorra. A T operátor zártsága alapján $x \in \operatorname{dom}(T)$ és $Tx = y$ teljesül, amivel megmutattuk, hogy $y \in \operatorname{ran} T$, vagyis $\operatorname{ran} T$ zárt. Végezetül megmutatjuk, hogy T^{-1} korlátos: legyen ui. $y \in \mathcal{K}$, akkor y előáll $y = Tx$ alakban és ezért

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Tx\| = \|y\|,$$

amiből következik, hogy T^{-1} korlátos és $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$. ■

11.50. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ pozitív szimmetrikus operátor, akkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

(i) *A önadjungált,*
(ii) $\operatorname{ran}(I + A) = \mathcal{H}$.

Emellett az (i) és (ii) ekvivalens feltételek teljesülése esetén fennáll, hogy $(I+A)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ és $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$.

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Megmutatjuk, hogy A teljesíti a 11.49 Lemma feltételeit. Ha ui. $x \in \mathcal{H}$, akkor

$$\|(I + A)x\|^2 = \|x\|^2 + 2(Ax \,|\, x) + \|Ax\|^2 \geq \|x\|^2, \tag{11.21}$$

amiből következik, hogy $\ker(I + A) = \{0\}$. Másfelől A önadjungáltsága folytán

$$[\operatorname{ran}(I + A)]^{\perp} = \ker(I + A) = \{0\},$$

vagyis $I + A$ képtere sűrű. A 11.49 Lemma alapján $\operatorname{ran}(I + A) = \mathcal{H}$.

(ii)⇒(i): Mivel $I + A$ szürjektív szimmetrikus operátor, azért $I + A$, és egyúttal A is önadjungált.

Végezetül, ha az (i) és (ii) ekvivalens feltételek teljesülnek, akkor a 11.21 becslés alapján $I + A$ injektív, $(I + A)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ és $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$. ■

11.51. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér, akkor az $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ operátort *ferdén szimmetrikusnak* nevezzük, ha

$$(Sx \mid y) = -(x \mid Sy), \qquad x, y \in \operatorname{dom}(S).$$

Az S operátort *ferdén önadjungáltnak* nevezzük, ha S sűrűn definiált és $S^* = -S$.

Komplex Hilbert-tér esetén a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus operátorok között meglehetősen szoros kapcsolat van, ui. egy S operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha iS ferdén szimmetrikus. Hasonlóképp, egy S operátor pontosan akkor önadjungált, ha iS ferdén önadjungált.

11.52. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ egy ferdén szimmetrikus operátor. Akkor a következők ekvivalensek:*

(i) *S ferdén önadjungált,*
(ii) $\operatorname{ran} M_{S,-S} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,
(iii) $\operatorname{ran}(I - S^2) = \mathcal{H}$,
(iv) $\operatorname{ran}(I + S) = \operatorname{ran}(I - S) = \mathcal{H}$,
(v) *S^2 sűrűn definiált és önadjungált.*

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii) és (ii)⇒(iii) implikációk $T := -S$ választás mellett azonnali következményeként adódnak a 11.47 Tételből.

(iii)⇒(iv): Ha $\operatorname{ran}(I - S^2) = \mathcal{H}$, akkor a

$$I - S^2 = (I - S)(I + S) = (I + S)(I - S)$$

egyenlőségek alapján világos, hogy $\operatorname{ran}(I \pm S) = \mathcal{H}$ is teljesül.

(iv)⇒(v): Ha $(I + S)$ és $(I - S)$ mindketten szürjektív operátorok, akkor azok $I - S^2$ szorzata is az. Másfelől $A := -S^2$ pozitív szimmetrikus operátor, így $\operatorname{ran}(I + A) = \mathcal{H}$ miatt A önadjungált, következésképp $S^2 = -A$ is önadjungált.

(v)⇒(i): A feltétel szerint $A = -S^2$ pozitív önadjungált, ezért

$$\operatorname{ran}(I + A) = \operatorname{ran}(I - S^2) = \mathcal{H},$$

speciálisan $T = -S$ választással $\operatorname{ran}(I + ST) = \operatorname{ran}(I + TS) = \mathcal{H}$, amiből a 11.47 Tétel szerint $S^* = T$, vagyis $S^* = -S$ következik. ∎

Az előző tétel egy fontos alkalmazásaként kapjuk a komplex Hilbert-terek önadjungált operátorainak alábbi, Neumann Jánostól származó jellemzését:

11.53. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér és $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ szimmetrikus operátor, akkor a következő kijelentések egyenértékűek.*

(i) *S önadjungált,*
(ii) $\operatorname{ran}(S + iI) = \operatorname{ran}(S - iI) = \mathcal{H}$.

Bizonyítás. Az S szimmetrikus operátor pontosan akkor önadjungált, ha iS ferdén önadjungált. Fennállnak továbbá a következő képtér-azonosságok:

$$\operatorname{ran}(iS + I) = \operatorname{ran}(S - iI), \qquad \operatorname{ran}(iS - I) = \operatorname{ran}(S + iI).$$

A 11.52 Tétel (i)⇔(iv) ekvivalenciája alapján kapjuk a bizonyítandó állítást. ∎

11.54. Megjegyzés. A fenti Következményre egy egyszerű, az eddigiektől független bizonyítást adhatunk a következőképp.

Egyfelől, ha S szimmetrikus, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(S)$ vektorra

$$\begin{aligned}\|(S+iI)x\|^2 &= \|Sx\|^2 + (Sx \,|\, ix) + (ix \,|\, Sx) + \|x\|^2 \\ &= \|Sx\|^2 - i(Sx \,|\, x) + i(Sx \,|\, x) + \|x\|^2 \\ &= \|Sx\|^2 + \|x\|^2,\end{aligned}$$

és hasonlóképp, $\|(S-iI)x\|^2 = \|Sx\|^2 + \|x\|^2$, vagyis

$$\|(S \pm iI)x\|^2 \geq \|x\|^2, \qquad x \in \operatorname{dom}(S).$$

Ha S önadjungált, akkor

$$[\operatorname{ran}(S+iI)]^\perp = \ker(S-iI) = \{0\},$$

illetve $[\operatorname{ran}(S-iI)]^\perp = \{0\}$. A 11.49 Lemma szerint ebből $\operatorname{ran}(S \pm iI) = \mathcal{H}$ adódik.

Megfordítva, tegyük fel hogy $\operatorname{ran}(S \pm iI) = \mathcal{H}$. Elsőként igazoljuk, hogy S sűrűn definiált: legyen ui. $u \in [\operatorname{dom}(S)]^\perp$ tetszőleges, akkor létezik $v \in \operatorname{dom}(S)$, hogy $(S-iI)v = u$, és létezik $w \in \operatorname{dom}(S)$, hogy $(S+iI)w = v$, de akkor

$$0 = (u \,|\, w) = ((S-iI)(S+iI)w \,|\, w) = \|(S+iI)w\|^2 = \|v\|^2,$$

következésképp $v = 0$ és $u = (S-iI)v = 0$. Tehát S sűrűn definiált, így létezik az S^* adjungált operátor, melyre $S \subset S^*$ miatt

$$\mathcal{H} = \operatorname{ran}(S+iI) \subseteq \operatorname{ran}(S^*+iI),$$

illetve

$$\ker(S^*+iI) = [\operatorname{ran}(S-iI)]^\perp = \{0\}$$

adódik, amiből egyszerű megfontolással következik, hogy $S + iI = S^* + iI$, és így $S = S^*$.

11.55. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és legyen $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ szimmetrikus operátor, akkor a következők ekvivalensek:*

(i) *S önadjungált operátor,*
(ii) $\operatorname{ran} M_{S,S} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,
(iii) $\operatorname{ran}(I + S^2) = \mathcal{H}$,
(iv) *S^2 pozitív önadjungált operátor.*

Bizonyítás. Az (i), (ii) és (iii) kijelentések ekvivalenciája nyilvánvaló a 11.47 Tételből. Ha S szimmetrikus, akkor S^2 pozitív operátor, ezért a (iii) és (iv) kijelentések ekvivalenciája következik a 11.50 Tételből. ■

11.56. Példa. Legyen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ mértéktér és legyen $f : X \to \mathbb{R}$ egy valós értékű mérhető függvény. Tekintsük a $\mathcal{H} \coloneqq L^2(X, \mu)$ valós vagy komplex Hilbert-téren azt az $S : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátort, amelyet a

$$\operatorname{dom}(S) \coloneqq \{u \in L^2(X,\mu) \,|\, f \cdot u \in L^2(X,\mu)\}$$

lineáris altéren az

$$Su \coloneqq f \cdot u, \qquad u \in \operatorname{dom}(S)$$

hozzárendeléssel értelmezünk. Könnyen látható, hogy S szimmetrikus operátor: legyenek ui. $u, v \in \operatorname{dom}(A)$, akkor

$$(Su \mid v) = \int_X fu \cdot \overline{v}\, d\mu = \int_X u \cdot \overline{fv}\, d\mu = (u \mid Sv).$$

Megmutatjuk, hogy S önadjungált, amihez a 11.55 Tétel (iii) pontja alapján elegendő azt igazolnunk, hogy $\operatorname{ran}(I + S^2) = L^2(X, \mu)$. Rögzítsünk ehhez egy $v \in L^2(X, \mu)$ függvényt, akkor világos, hogy $u := \frac{v}{1+f^2}$ választással $u \in \operatorname{dom}(S)$ és

$$Su = \frac{fv}{1 + f^2} \in \operatorname{dom}(S),$$

vagyis $u \in \operatorname{dom}(S^2)$, továbbá

$$(I + S^2)u = v,$$

vagyis valóban $\operatorname{ran}(I + S^2) = L^2(X, \mu)$. Ezzel megmutattuk, hogy S önadjungált.

11.6. Pozitív önadjungált operátor négyzetgyöke

A 8.34 Tételben igazoltuk, hogy bármely korlátos pozitív operátornak egyértelműen létezik korlátos pozitív négyzetgyöke. Ebben a fejezetben ezt az eredményt általánosítjuk a nem-korlátos operátorok esetére: igazolni fogjuk, hogy bármely pozitív önadjungált operátornak egyértelműen létezik pozitív önadjungált négyzetgyöke.

11.57. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér.*

(a) *Ha $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ pozitív önadjungált operátor, akkor $(I + A)^{-1}$ és $A(I + A)^{-1}$ mindketten kontraktív pozitív operátorok, hogy $(I + A)^{-1} + A(I + A)^{-1} = I$.*

(b) *Ha S olyan szimmetrikus operátor, hogy $A \subset S^2$, akkor S önadjungált és $A = S^2$.*

Bizonyítás. (a) Ha A pozitív önadjungált, akkor $\operatorname{ran}(I + A) = \mathcal{H}$, ezért $(I + A)^{-1}$ korlátos önadjungált operátor, és $\operatorname{ran}(I + A)^{-1} = \operatorname{dom}(A)$, amiből következik, hogy

$$\operatorname{dom}(A(I + A)^{-1}) = \mathcal{H}.$$

Ha $x \in \mathcal{H}$, akkor x előáll $x = (I + A)y$ alakban valamely $y \in \operatorname{dom}(A)$ mellett, ezért

$$(A(I + A)^{-1}x \mid x) = (Ay \mid (I + A)y) = (Ay \mid y) + \|Ay\|^2 \geq 0,$$

és hasonlóan

$$((I + A)^{-1}x \mid x) = \|y\|^2 + (y \mid Ay) \geq 0,$$

vagyis $A(I + A)^{-1}$ és $(I + A)^{-1}$ mindketten pozitív operátorok. Végül

$$A(I + A)^{-1} + (I + A)^{-1} = (I + A)(I + A)^{-1} = I,$$

amivel az (a) állítást igazoltuk.

(b) Vegyük észre, hogy S mellett S^2 is szimmetrikus, továbbá önadjungált operátornak nem létezik valódi szimmetrikus kiterjesztése, ezért $S^2 = A$. A 11.55 Tétel szerint ha S^2 önadjungált, akkor S maga is önadjungált. ∎

11.58. Lemma. *Legyenek $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ Hilbert-terek és legyenek $T_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{K}_1$, valamint $T_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{K}_2$ sűrűn definiált zárt operátorok, hogy $T_1^*T_1 = T_2^*T_2$, akkor* $\operatorname{dom}(T_1) = \operatorname{dom}(T_2)$, *továbbá*

$$\|T_1x\|^2 = \|T_2x\|^2, \qquad x \in \operatorname{dom}(T_1). \tag{11.22}$$

Bizonyítás. Jelölje $S_j := T_j|_{\operatorname{dom}(T_j^*T_j)}$, akkor a 11.39 Állítás szerint $\bar{S}_j = T_j$. Következésképp, ha $x \in \operatorname{dom}(T_1)$, akkor létezik olyan $\operatorname{dom}(T_1^*T_1)$-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $x_n \to x$ és $T_1x_n \to Tx$. A feltevés szerint minden n-re $x_n \in \operatorname{dom}(T_2^*T_2)$, illetve

$$\begin{aligned}\|T_2(x_n - x_m)\|^2 &= (T_2^*T_2(x_n - x_m) \,|\, x_n - x_m)\\ &= (T_1^*T_1(x_n - x_m) \,|\, x_n - x_m) = \|T_1(x_n - x_m)\|^2,\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy $T_2x_n \to y$ valamely $y \in \mathcal{K}_2$ vektorra, és ezért a T_2 operátor zártsága alapján $x \in \operatorname{dom}(T_2)$, illetve

$$\|T_2x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|T_2x_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|T_1x_n\|^2 = \|T_1x\|^2.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\operatorname{dom}(T_1) \subseteq \operatorname{dom}(T_2)$, és ezért szimmetriai okokból $\operatorname{dom}(T_1) = \operatorname{dom}(T_2)$, illetve (11.22) következik. ■

11.59. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $B \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ és $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ olyan operátor, hogy $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. A következő kijelentések ekvivalensek:*

(i) *$BT \subset TB$,*
(ii) *$BT^{-1} = T^{-1}B$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Ha $BT \subset TB$, akkor $T^{-1}BTT^{-1} \subset T^{-1}TBT^{-1}$. A feltétel szerint $TT^{-1} = I$, illetve $T^{-1}T \subset I$, ezért $T^{-1}B \subset BT^{-1}$. Itt mindkét operátor a $\mathcal{H}$-n mindenütt értelmezett korlátos operátor, ezért $T^{-1}B = BT^{-1}$.

(ii)⇒(i): Ha $T^{-1}B = BT^{-1}$, akkor $TT^{-1}BT = TBT^{-1}T$, amiből $TT^{-1} = I$, illetve $T^{-1}T \subset I$ szerint $BT \subset TB$ adódik. ■

11.60. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és legyen A pozitív önadjungált operátor $\mathcal{H}$-n. Ekkor létezik egyetlen S pozitív önadjungált operátor, hogy $S^2 = A$. Ha $D \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan korlátos operátor, hogy $DT \subset TD$, akkor egyúttal $DS \subset SD$.*

Bizonyítás. A 11.57 Lemma szerint $A(I + A)^{-1}$ és $(I + A)^{-1}$ mindketten korlátos pozitív operátorok, ezért a 8.34 Tétel szerint (egyértelműen) léteznek olyan B és C korlátos pozitív operátorok, hogy

$$B^2 = A(I + A)^{-1}, \qquad \text{illetve} \qquad C^2 = (I + A)^{-1}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\ker C = [\operatorname{ran} C]^\perp = \{0\}$, ezért C^{-1} pozitív önadjungált operátor $\mathcal{H}$-ban. Megmutatjuk, hogy

$$S := BC^{-1}$$

olyan pozitív önadjungált operátor, amelyre $S^2 = A$. Elsőként megmutatjuk, hogy S pozitív. A 11.57 Lemma szerint $B^2 + C^2 = I$, amiből világos, hogy B^2 és C^2 egymással felcserélhető operátorok, amiből a 8.34 Tétel alapján következik, hogy $BC = CB$, illetve egyúttal az is, hogy $BC^{1/2} = C^{1/2}B$. Ha tehát $x \in \operatorname{dom} S = \operatorname{dom} C^{-1}$, akkor $y = C^{-1}x$ választással

$$(Sx \mid x) = (By \mid Cy) = (C^{1/2}By \mid C^{1/2}y) = (BC^{1/2}y \mid C^{1/2}y) \geq 0,$$

vagyis S pozitív. Hasonlóképp igazolható, hogy S szimmetrikus.

Az $S^2 = A$ egyenlőség igazolásához először vegyük észre, hogy

$$B = SC, \tag{11.23}$$

ui. $B = BC^{-1}C = SC$. Legyen ezután $x \in \operatorname{dom}(A)$, akkor

$$Ax = B^2(I + A)x = SCB(I + A)x = SBC(I + A)x = S^2C^2(I + A)x = S^2x,$$

amiből leolvasható, hogy $x \in \operatorname{dom}(S^2)$ és $S^2x = Ax$. Ez azt jelenti, hogy az S^2 szimmetrikus operátor kiterjeszti az A operátort, ezért a 11.57 Lemma szerint S önadjungált és $S^2 = A$.

Az egyértelműség bizonyításához legyen T szintén olyan pozitív önadjungált operátor, hogy $T^2 = A$. A 11.57 Lemma szerint $Z \coloneqq (I + T)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, illetve $ZT \subset TZ$, ezért $ZA = AZ$, és emiatt $Z(I + A) \subset (I + A)Z$ is teljesül. A 11.59 Lemma szerint ebből $C^2Z = ZC^2$, és emiatt $CZ = ZC$, illetve $C^{1/2}Z = ZC^{1/2}$ következik. Ismét a 11.59 Lemma szerint kapjuk, hogy $C(I + T) \subset (I + T)C$, illetve $C^{1/2}(I + T) \subset (I + T)C^{1/2}$, következésképp

$$CT \subset TC, \qquad \text{illetve} \qquad C^{1/2}T \subset TC^{1/2}. \tag{11.24}$$

Mivel S és T mindketten önadjungált operátorok, hogy $S^2 = T^2$, azért a 11.58 Lemma szerint $\operatorname{dom}(T) = \operatorname{dom}(S)$ és ezért $\operatorname{dom}(TC) = \operatorname{dom}(SC)$, ahol $SC = B$ korlátos operátor. Következésképp $\operatorname{dom}(TC) = \mathcal{H}$, amiből a zárt gráf tétel alapján kapjuk, hogy TC korlátos operátor. Másfelől TC pozitív, ui. ha $x \in \operatorname{dom} T$, akkor (11.24) alapján

$$(TCx \mid x) = (C^{1/2}TC^{1/2}x \mid x) = (TC^{1/2}x \mid C^{1/2}x) \geq 0,$$

vagyis TC pozitív a $\operatorname{dom}(T) \subseteq \mathcal{H}$ sűrű halmazon. Mivel TC korlátos operátor, azért ebből TC pozitivitása már következik. Végezetül, ismét (11.24) szerint

$$(TC)^2 \supset T^2C^2 = AC^2 = B^2 = A(I + A)^{-1},$$

így a korlátos pozitív négyzetgyök egyértelműsége alapján $TC = B$, és ezért

$$T = BC^{-1} = S,$$

amivel a négyzetgyök unicitását beláttuk.

A hiányzó kommutálási tulajdonság igazolásához legyen $D \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ olyan, hogy $DA \subset AD$, akkor egyúttal $D(I + A) \subset (I + A)D$, és ezért a 11.59 Lemma alapján $DC = CD$, $DB = BD$, valamint $DC^{-1} \subset C^{-1}D$ következik, amiből kapjuk, hogy

$$DBC^{-1} = BDC^{-1} \subset BC^{-1}D,$$

vagyis $DS \subset SD$. ■

11.61. Definíció. Legyen $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ pozitív önadjungált operátor, akkor $A^{1/2}$ jelöli azt az egyértelmű pozitív önadjungált operátort, amelyre

$$(A^{1/2})^2 = A.$$

Az $A^{1/2}$ operátort az A pozitív önadjungált négyzetgyökének nevezzük.

Láttuk, hogy ha $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátor, akkor T^*T pozitív önadjungált operátor, ezért értelmes a következő definíció:

11.62. Definíció. Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek, valamint $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátor, akkor a

$$|T| \coloneqq (T^*T)^{1/2}$$

pozitív önadjungált operátort a T abszolútértékének nevezzük.

11.63. Állítás. *Legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ sűrűn definiált zárt operátor, akkor* $\operatorname{dom}(|T|) = \operatorname{dom}(T)$ *és*

$$\|Tx\|^2 = \||T|x\|^2, \qquad x \in \operatorname{dom}(T).$$

Bizonyítás. Mivel $T^*T = |T|^2$, azért az állítás következik a 11.58 Lemmából. ■

11.7. Pozitív operátorok önadjungált kiterjesztése

Az alábbiakban bevezetünk egy rendezést a pozitív önadjungált operátorok körében:

11.64. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $A, B : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ pozitív önadjungált operátorok, akkor azt mondjuk, hogy $A \preceq B$, ha $\operatorname{dom}(B^{1/2}) \subseteq \operatorname{dom}(A^{1/2})$ és

$$\|A^{1/2}x\|^2 \leq \|B^{1/2}x\|^2, \qquad x \in \operatorname{dom}(B^{1/2}).$$

Világos, hogy ha A, B korlátos operátorok, akkor az $A \preceq B$ kijelentés pontosan akkor teljesül, ha $A \leq B$. Az is egyszerűen látható, hogy „$\preceq$" reflexív és tranzitív reláció. Nem teljesen nyilvánvaló azonban az antiszimmetria, ennek igazolásához először belátjuk a következő segédtételt:

11.65. Lemma. *Legyenek $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ Hilbert-terek, legyenek továbbá $T_1 : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}_1$ és $T_2 : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}_2$ sűrűn definiált zárt operátorok. A következő kijelentések ekvivalensek:*

(i) $\operatorname{dom}(T_2) \subseteq \operatorname{dom}(T_1)$ *és*

$$\|T_1x\|^2 \leq \|T_2x\|^2, \qquad x \in \operatorname{dom}(T_2),$$

(ii) $(I + T_2^*T_2)^{-1} \leq (I + T_1^*T_1)^{-1}$.

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Tekintsük a $G(T_1)$ és $G(T_2)$ Hilbert-tereket, akkor az (i) feltétel szerint az alábbi

$$D(x, T_2x) \coloneqq (x, T_1x), \qquad x \in \operatorname{dom}(T_2)$$

egyenlőséggel definiált $D : G(T_2) \to G(T_1)$ jól definiált korlátos operátor, éspedig $\|D\| \leq 1$. Valóban, ha $x \in \operatorname{dom}(T_2)$, akkor

$$\|D(x, T_2x)\|^2 = \|x\| + \|T_1x\|^2 \leq \|x\| + \|T_2x\|^2 = \|(x, T_2x)\|^2.$$

Tekintsük ezután a 11.38 Tétel bizonyításában bevezetett

$$J_i(x, T_ix) \coloneqq x, \qquad x \in \operatorname{dom}(T_i)$$

egyenlőséggel értelmezett $J_i : G(T_i) \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, operátorokat. Láttuk, hogy ekkor

$$J_iJ_i^* = (I + T_i^*T_i)^{-1}, \qquad i = 1, 2 \tag{11.25}$$

teljesül. Emellett bármely $x \in \operatorname{dom}(T_2)$ vektorra fennáll, hogy

$$J_1 D(x, T_2 x) = J_1(x, T_1 x) = x = J_2(x, T_2 x),$$

amiből kapjuk, hogy $J_2 = J_1 D$. Következésképp bármely $h \in \mathcal{H}$ vektor mellett

$$(J_2 J_2^* h \,|\, h) = \|J_2^* h\|^2 = \|D^* J_1^* h\|^2 \leq \|D^*\|^2 \|J_1^* h\|^2 = \|D\|^2 (J_1 J_1^* h \,|\, h)$$

amiből (11.25) és $\|D\| \leq 1$ figyelembevételével (ii) következik.

(ii)⇒(i): A (ii) feltétel (11.25) alapján ekvivalens az alábbival:

$$\|J_2^* h\|^2 \leq \|J_1^* h\|^2, \qquad h \in \mathcal{H}.$$

A 6.28 Douglas faktorizációs tétel szerint létezik olyan $D : G(T_2) \to G(T_1)$ folytonos lineáris operátor, hogy $\|D\| \leq 1$ és amelyre

$$J_2 = J_1 D. \tag{11.26}$$

Legyen $x \in \operatorname{dom}(T_2)$, akkor $D(x, T_2 x) \in G(T_1)$ miatt $D(x, T_2 x) = (u, T_1 u)$ teljesül valamely $u \in \operatorname{dom}(T_1)$ vektorra, de akkor (11.26) alapján

$$x = J_2(x, T_2 x) = J_1 D(x, T_2 x) = J_1(u, T_1 u) = u,$$

azaz $x = u \in \operatorname{dom}(T_1)$ és $D(x, T_2 x) = (x, T_1 x)$. Ezzel igazoltuk, hogy $\operatorname{dom}(T_2) \subseteq \operatorname{dom}(T_1)$ és bármely $x \in \operatorname{dom}(T_2)$ vektorra fennáll, hogy

$$\|x\|^2 + \|T_1 x\|^2 = \|(x, T_1 x)\|^2 = \|D(x, T_2 x)\|^2 \leq \|(x, T_2 x)\|^2 = \|x\|^2 + \|T_2 x\|^2,$$

amiből (i) következik. ■

11.66. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyenek $A, B : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ pozitív önadjungáltak, akkor $A \preceq B$ pontosan akkor teljesül, ha $(I + B)^{-1} \leq (I + A)^{-1}$. Ha $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $A = B$.*

Bizonyítás. Az állítás első fele világos az előző lemmából $T_1 := A^{1/2}$ és $T_2 := B^{1/2}$ választással. Ha $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $(I + B)^{-1} \leq (I + A)^{-1}$ és $(I + A)^{-1} \leq (I + B)^{-1}$ és ezért a „$\leq$” reláció antiszimmetriájából $(I + A)^{-1} = (I + B)^{-1}$ és egyúttal $A = B$ is következik. ■

A következő tételben szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy egy adott $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ nem feltétlenül sűrűn definiált lineáris operátornak mikor létezik pozitív önadjungált kiterjesztése. Vegyük észre, hogy ilyen kiterjesztés nem feltétlenül létezik, ui. a 11.34 Példabeli S pozitív szimmetrikus operátor nem lezárható, vagyis nem létezik zárt, így önadjungált kiterjesztése sem.

11.67. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ pozitív szimmetrikus operátor, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) *létezik olyan B pozitív önadjungált operátor, amelyre $A \subset B$,*

(ii) *az alábbi*

$$\mathscr{D}_*(A) := \left\{ y \in \mathcal{H} \,\middle|\, \exists m_y \geq 0 : |(Ax \,|\, y)|^2 \leq m_y (Ax \,|\, x), \quad \forall x \in \operatorname{dom}(A) \right\} \tag{11.27}$$

egyenlőséggel definiált $\mathscr{D}_*(A)$ altér sűrű $\mathcal{H}$-ban.

Továbbá az (i) és (ii) ekvivalens feltételek mellett létezik az A-nak olyan A_N pozitív önadjungált kiterjesztése, hogy az A bármely B pozitív önadjungált kiterjesztésére $A_N \preceq B$ teljesül.

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Megmutatjuk, hogy az A bármely B pozitív önadjungált kiterjesztésére

$$\operatorname{dom}(B^{1/2}) \subseteq \mathscr{D}_*(A) \tag{11.28}$$

teljesül. Valóban, ha $y \in \operatorname{dom}(B^{1/2})$, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(A)$ vektorra fennáll az alábbi

$$|(Ax \,|\, y)|^2 = |(Bx \,|\, y)|^2 = |(B^{1/2}x \,|\, B^{1/2}y)|^2 \leq \|B^{1/2}y\|^2 \|B^{1/2}x\|^2 = \|B^{1/2}y\|^2 (Ax \,|\, x),$$

következésképp $y \in \mathscr{D}_*(A)$.

(ii)⇒(i): Tegyük fel, hogy $\mathscr{D}_*(A) \subseteq \mathcal{H}$ sűrű és tekintsük annak $\operatorname{ran} A$ képterén az alábbi

$$\langle Ax \,|\, Ay \rangle_A := (Ax \,|\, y), \qquad x, y \in \operatorname{dom}(A)$$

egyenlőséggel értelmezett $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ leképezést, mely jól definiált, ha ui. x_1, x_2 és $y_1, y_1 \in \operatorname{dom}(A)$ olyanok, hogy $Ax_1 = Ax_2$ és $Ay_1 = Ay_2$, akkor

$$(Ax_1 \,|\, y_1) = (Ax_2 \,|\, y_1) = (x_2 \,|\, Ay_1) = (x_2 \,|\, Ay_2) = (Ax_2 \,|\, y_2).$$

Emellett A pozitivitása alapján nyilvánvaló, hogy $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ félskalárszorzat. Megmutatjuk, hogy $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A$ skalárszorzat: tegyük fel ui. hogy $\langle Ax \,|\, Ax \rangle_A = (Ax \,|\, x) = 0$ teljesül valamely $x \in \operatorname{dom}(A)$ vektorra, akkor bármely $y \in \mathscr{D}_*(A)$ mellett $(Ax \,|\, y) = 0$ teljesül, következésképp $Ax \in \mathscr{D}_*(A)^\perp$, így (ii) alapján $Ax = 0$.

Ez tehát azt jelenti, hogy a $(\operatorname{ran} A, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_A)$ pár prehilbert tér. Jelölje $\mathcal{H}_A$ ennek teljessé tételét, akkor a 4.20 Állítás szerint $\mathcal{H}_A$ Hilbert-tér és abban $\operatorname{ran} A$ definícjó szerint sűrű lineáris altér. Tekintsük ezután az alábbi

$$J(Ax) := Ax, \qquad x \in \operatorname{dom}(A) \tag{11.29}$$

egyenlőséggel definiált $J : \mathcal{H}_A \rightarrowtail \mathcal{H}$, kanonikus beágyazási operátort. Akkor tehát $\operatorname{dom}(J) = \operatorname{ran} A$ miatt J sűrűn definiált operátor, megmutatjuk, hogy annak $J^* : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}_A$ adjungáltjára fennáll, hogy

$$\operatorname{dom}(J^*) = \mathscr{D}_*(A). \tag{11.30}$$

Valóban, egy $y \in \mathcal{H}$ vektorra $y \in \operatorname{dom}(J^*)$ pontosan akkor áll fenn, ha létezik $m_y \geq 0$, hogy

$$|(J(Ax) \,|\, y)|^2 \leq m_y \cdot \langle Ax \,|\, Ax \rangle_A, \qquad x \in \operatorname{dom}(A),$$

azaz $J(Ax) = Ax$ figyelembvételével

$$|(Ax \,|\, y)|^2 \leq m_y \cdot (Ax \,|\, x), \qquad x \in \operatorname{dom}(A),$$

vagyis ha $y \in \mathscr{D}_*(A)$. A (ii) feltétel szerint $\operatorname{dom}(J^*) = \mathscr{D}_*(A)$ sűrű, következésképp J lezárható operátor. Megmutatjuk, hogy $J^{**}J^*$ pozitív önadjungált kiterjesztése A-nak. Ehhez először belátjuk, hogy $\operatorname{dom}(A) \subseteq \mathscr{D}_*(A)$ és

$$J^*x = Ax, \qquad x \in \operatorname{dom}(A). \tag{11.31}$$

Valóban, ha $y \in \operatorname{dom}(A)$, akkor a félskalárszorzatokra vonatkozó Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$|(Ax \,|\, y)|^2 \leq (Ay \,|\, y)(Ax \,|\, x), \qquad x \in \operatorname{dom}(A),$$

ezért valóban $y \in \mathscr{D}_*(A)$. Emellett

$$\langle Ax \,|\, J^*y \rangle_A = (J(Ax) \,|\, y) = (Ax \,|\, y) = \langle Ax \,|\, Ay \rangle_A,$$

amiből a $J^*y = Ay \in \mathcal{H}_A$ egyenlőség már következik. Ebből már egyszerűen ellenőrizhető, hogy $J^{**}J^*$ az A kiterjesztése: ha ui. $x \in \operatorname{dom}(A)$, akkor $J^*x = Ax$ figyelembevételével $J^*x \in \operatorname{ran} A = \operatorname{dom}(J)$, és ezért $J \subset J^{**}$ folytán

$$J^{**}J^*x = J^{**}(Ax) = J(Ax) = Ax,$$

vagyis valóban $A \subset J^{**}J^*$.

A bizonyítás utolsó lépéseként igazoljuk, hogy $A_N := J^{**}J^*$ rendelkezik a Tételben megadott minimalitási tulajdonsággal. Ehhez először igazoljuk, hogy a 11.63 Állítás szerint

$$\operatorname{dom}(A_N^{1/2}) = \operatorname{dom}(J^*) = \mathscr{D}_*(A) \tag{11.32}$$

emellett bármely $y \in \mathscr{D}_*(A)$ vektorra

$$\|A_N^{1/2}y\|^2 = \sup_{x\in\operatorname{dom}(A),(Ax\,|\,x)\le 1} |(Ax\,|\,y)|^2 \tag{11.33}$$

A (11.32) formula következik a 11.63 Állításból, illetve ugyanezen Állítás alapján

$$\|A_N^{1/2}y\|^2 = \|J^*y\|_A^2.$$

Mivel $\operatorname{ran} A \subseteq \mathcal{H}_A$ sűrű lineáris altér, azért az alábbi

$$\{Ax\,|\,x \in \operatorname{dom}(A), \langle Ax\,|\,Ax\rangle_A \le 1\} = \{Ax\,|\,x \in \operatorname{dom}(A), (Ax\,|\,x) \le 1\}$$

halmaz sűrű a $\mathcal{H}_A$-beli zárt egységgömbben, ezért

$$\begin{aligned}\|J^*y\|_A^2 &= \sup_{x\in\operatorname{dom}(A),(Ax\,|\,x)\le 1} \left|\langle Ax\,|\,J^*y\rangle_A\right|^2 \\ &= \sup_{x\in\operatorname{dom}(A),(Ax\,|\,x)\le 1} |(Ax\,|\,y)|^2,\end{aligned}$$

amivel a (11.33) formulát igazoltuk. Tekintsük ezek után az A egy tetszőleges B pozitív önadjungált kiterjesztését. Egyfelől (11.28) és (11.32) szerint $\operatorname{dom}(B^{1/2}) \subseteq \operatorname{dom}(A^{1/2})$. Másfelől jelölje J_B a fenti konstrukció szerint B-hez asszociált operátort, akkor az eddigiek alapján $J_B^{**}J_B^*$ önadjungált kiterjesztése a B önadjungált operátornak, következésképp fennáll a $J_B^{**}J_B^* = B$ egyenlőség. A (11.33) formula szerint bármely $y \in \operatorname{dom}(B^{1/2})$ vektorra fennáll, hogy

$$\|B^{1/2}y\|^2 = \|(J_B^{**}J_B^*)^{1/2}y\|^2 = \sup_{x\in\operatorname{dom}(B),(Bx\,|\,x)\le 1} |(Bx\,|\,y)|^2,$$

amiből $A \subset B$ és (11.33) alapján nyerjük, hogy

$$\|B^{1/2}y\|^2 \ge \|A_N^{1/2}y\|^2, \qquad y \in \operatorname{dom}(B^{1/2}).$$

Ezzel a $A_N \preceq B$ relációt és egyúttal a tételt is igazoltuk. ■

11.68. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, akkor bármely $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált pozitív operátornak létezik pozitív önadjungált kiterjesztése.*

Bizonyítás. A félskalárszorzatokra vonatkozó Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján fennáll a

$$\operatorname{dom}(A) \subseteq \mathscr{D}_*(A)$$

tartalmazás, következésképp $\mathscr{D}_*(A)$ sűrű. ■

11.69. Definíció. Ha az $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ pozitív operátornak létezik pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor a 11.67 Tételben szereplő A_N operátort az *A Krein–Neumann kiterjesztésének* nevezzük.

A következőkben igazoljuk, hogy egy $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ sűrűn definiált pozitív operátornak mindig létezik a legnagyobb, ún. *Friedrichs-kiterjesztése.*

11.70. Lemma. *Legyenek $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-terek és legyen $T : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{K}$ egy lezárható operátor, akkor egy $h \in \mathcal{H}$ vektorra $h \in \operatorname{dom}(\bar{T})$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $\operatorname{dom}(T)$-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy*

$$x_n \to h, \qquad \textit{és} \qquad T(x_n - x_m) \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Bizonyítás. Először vegyünk egy $h \in \operatorname{dom}(\bar{T})$ vektort, akkor $(h, \bar{T}h) \in \overline{G(T)}$, ezért létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\operatorname{dom}(T)$-ben, hogy $(x_n, Tx_n) \to (h, \bar{T}h)$, a $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$-beli szorzatnorma szerint. Világos, hogy ekkor $x_n \to h$ és $\|Tx_n - Tx_m\| \to 0$, $n, m \to \infty$. Megfordítva, a feltételből világos, hogy az $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat a $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$-ban, ezért valamely $k \in \mathcal{K}$ mellett konvergál a $(h, k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ vektorhoz. De akkor $(h, k) \in \overline{G(T)}$, ezért $h \in \operatorname{dom}(\bar{T})$ és $\bar{T}h = k$. ■

11.71. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és legyen $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ egy sűrűn definiált pozitív operátor, akkor létezik olyan A_F pozitív önadjungált kiterjesztése A-nak, hogy az A bármely B pozitív önadjungált kiterjesztésére $B \preceq A_F$ teljesül.*

Bizonyítás. A 11.67 Tétel bizonyításának konstrukciójának jelöléseivel vezessük be a

$$Q := J^*|_{\operatorname{dom}(A)},$$

operátort. Ekkor $Q : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}_A$ sűrűn definiált lezárható operátor, melyre $J^{**} \subset Q^*$ és $Q^{**} \subset J^*$. A (11.31) formula alapján fennáll, hogy

$$Qx = Ax, \qquad x \in \operatorname{dom}(A), \tag{11.34}$$

ezért bármely $x \in \operatorname{dom}(A)$ vektorra $Q^{**}x \in \operatorname{dom}(Q^*)$, illetve

$$Q^*Q^{**}x = Q^*(Ax) = J(Ax) = Ax,$$

vagyis az $A_F := Q^*Q^{**}$ pozitív önadjungált operátor az A egy kiterjesztését adja. Megmutatjuk, hogy A_F eleget tesz a tételben leírt követelményeknek. Ehhez jelölje $\mathscr{D}_{**}(A)$ azon $x \in \mathcal{H}$ vektorok halmazát, amelyekhez létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\operatorname{dom}(A)$-beli sorozat, hogy

$$x_n \to x \qquad \text{és} \qquad (A(x_n - x_m) \,|\, x_n - x_m) \to 0. \tag{11.35}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\operatorname{dom}(A_F^{1/2}) = \mathscr{D}_{**}(A), \tag{11.36}$$

és bármely $x \in \mathscr{D}_{**}(A)$ vektorra

$$\|A_F^{1/2}x\|^2 = \lim_{n\to\infty} (Ax_n \,|\, x_n). \tag{11.37}$$

Valóban, egyfelől $\operatorname{dom}(A_F^{1/2}) = \operatorname{dom}(Q^{**})$, ahol a 11.70 Lemma szerint egy $x \in \mathcal{H}$ vektorra $x \in \operatorname{dom}(Q^{**})$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $\operatorname{dom}(A)$-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $x_n \to x$ és $\|Qx_n - Qx_m\|_A^2 \to 0$, ahol (11.34) figyelembevételével

$$\|Qx_n - Qx_m\|_A^2 = \langle A(x_n - x_m) \,|\, A(x_n - x_m)\rangle_A = (A(x_n - x_m) \,|\, x_n - x_m),$$

amivel a (11.36) egyenlőséget igazoltuk. Ha pedig $x \in \mathscr{D}_{**}(A)$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathrm{dom}(A)$-beli sorozat, amelyre (11.35) fennáll, akkor az eddigiek alapján $x \in \mathrm{dom}(Q^{**})$ és $Qx_n \to Q^{**}x$, ezért

$$\|A_F^{1/2}x\|^2 = \|Q^{**}x\|_A^2 = \lim_{n\to\infty} \|Qx_n\|_A^2 = \lim_{n\to\infty} (Ax_n \,|\, x_n),$$

amivel a (11.37) formulát is igazoltuk.

Legyen ezek után B az A egy tetszőleges pozitív önadjungált kiterjesztése, akkor az eddigi konstrukciót A helyett B-re alkalmazva kapjuk, hogy $B_F = B$, ui. $B \subset B_F$ és a B önadjungált operátornak nem létezik valódi önadjungált kiterjesztése. Legyen $x \in \mathrm{dom}(A_F^{1/2})$, akkor a (11.36) egyenlőség szerint létezik $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{dom}(A)$-beli sorozat, hogy (11.35) fennáll, de akkor $A \subset B$ figyelembevételével minden n-re $x_n \in \mathrm{dom}(B)$ és $(B(x_n - x_m) \,|\, x_n - x_m) \to 0$, vagyis $x \in \mathscr{D}_{**}(B) = \mathrm{dom}(B_F)^{1/2}$. Emellett a (11.37) egyenlőséget A helyett B-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|B^{1/2}x\|^2 = \|B_F^{1/2}x\|^2 = \lim_{n\to\infty} (Bx_n \,|\, x_n) = \lim_{n\to\infty} (Ax_n \,|\, x_n) = \|A_F^{1/2}x\|^2,$$

amivel megmutattuk, hogy $B \preceq A_F$. ■

11.72. Definíció. Az A sűrűn definiált pozitív operátor fenti bizonyításban konstruált A_F pozitív önadjungált kiterjesztését az A operátor *Friedrichs-kiterjesztésének* nevezzük.

11.73. Következmény. *Ha A sűrűn definiált pozitív operátor, akkor az A bármely B pozitív önadjungált kiterjesztésére*

$$A_N \preceq B \preceq A_F$$

teljesül, ahol A_N az A Krein-Neumann kiterjesztése, A_F pedig az A Friedrichs-kiterjesztése.

11.74. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti 11.67 és 11.71 Tételekben konkrét leírását adtuk az A_N, illetve A_F pozitív önadjungált operátorok négyzetgyökének értelmezési tartományának, éspedig

$$\mathrm{dom}(A_N^{1/2}) = \mathscr{D}_*(A), \qquad \text{illetve} \qquad \mathrm{dom}(A_F^{1/2}) = \mathscr{D}_{**}(A).$$

Emellett a (11.33), valamint (11.37) egyenlőségekkel a megfelelő kvadratikus alakokra is konkrét formulákat kaptunk.

11.75. Példa. Legyen $I := [0, \pi]$ és tekintsük a $\mathcal{H} := L^2(I)$ *valós* Hilbert-térben azt az $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátort, amelyet a

$$\mathrm{dom}(A) := \{u \in \mathscr{C}^2(I; \mathbb{R}) \,|\, u(0) = u(\pi) = 0\}$$

sűrű altéren az alábbi hozzárendeléssel értelmezünk:

$$Au := -u'', \qquad u \in \mathrm{dom}(A).$$

Legyenek $u, v \in \mathrm{dom}(A)$ tetszőlegesek, akkor parciális integrálással kapjuk, hogy

$$(Au \,|\, v) = -\int_0^\pi u'' \cdot v = \Big[-u' \cdot v\Big]_0^\pi + \int_0^\pi u' \cdot v' = \int_0^\pi u' \cdot v',$$

amiből leolvasható, hogy A pozitív szimmetrikus operátor. Emellett minden $n = 1, 2, \dots$ mellett legyen

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x), \qquad x \in [0, \pi],$$

akkor ismeretes, hogy $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer $\mathcal{H}$-ban, emellett minden n-re

$$Ae_n = n^2 e_n.$$

Legyen most $f \in L^2(I)$, akkor a Bessel-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy az alábbi

$$u \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(f \,|\, e_n)e_n$$

sorösszeg létezik, továbbá egyszerű számolás mutatja, ahogy $u \in \mathrm{dom}(A^{**})$ és $A^{**}u = f$. Valóban, ha u_n jelöli a megfelelő n-edik részletösszeget, akkor $u_n \in \mathrm{dom}(A)$ és

$$Au_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}(f \,|\, e_k)Ae_k = \sum_{k=1}^{n}(f \,|\, e_k)e_k,$$

ezért az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszer teljessége miatt $Au_n \to f$. Ezzel igazoltuk, hogy az A^{**} szimmetrikus operátor szürjektív, így a 11.42 Lemma szerint A^{**} önadjungált operátor. Könnyen látható, hogy ekkor az A Krein-Neumann- és Friedrichs-kiterjsztéseire

$$A^{**} = A_N = A_F$$

egyenlőségek teljesülnek.

11.76. Példa. Legyen $I \coloneqq [a,b]$ egy tetszőleges korlátos és zárt valós intervallum és jelölje $\mathscr{C}_0^\infty(I;\mathbb{K})$ azon végtelenszer differenciálható $u : I \to \mathbb{K}$ függvények vektorterét, amelyek tartójára $\mathrm{supp}(u) \subseteq]a,b[$ teljesül. Tekintsük a $\mathcal{H} = L^2(I)$ (valós vagy komplex) Hilbert-térben azt az $A : \mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ lineáris operátort, amelyet a

$$\mathrm{dom}(A) = \mathscr{C}_0^\infty(I;\mathbb{K})$$

sűrű altéren az alábbi hozzárendeléssel értelmezünk:

$$Au = -u'', \qquad u \in \mathrm{dom}(A).$$

Az előző példához hasonlóan igazolható, hogy A pozitív szimmetrikus operátor, illetve

$$(Au \,|\, u) = \int_a^b |u'|^2, \qquad u \in \mathrm{dom}(A). \tag{11.38}$$

A 11.71 Tétel szerint létezik az A Friedrichs-kiterjesztése, jelölje ezt A_F. A (11.36) formula szerint egy $u \in L^2(I)$ függvényre $u \in \mathrm{dom}(A_F^{1/2})$ pontosan akkor igaz, ha létezik $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathrm{dom}(A)$-beli sorozat, hogy $u_n \to u$ és

$$(A(u_n - u_m) \,|\, u_n - u_m) \to 0, \qquad n, m \to \infty,$$

emellett ilyenkor fennáll, hogy

$$\|A_F^{1/2}u\|^2 = \lim_{n\to\infty}(Au_n \,|\, u_n).$$

A (11.38) formula alapján tehát egy $u \in L^2(I)$ függvényre $u \in \mathrm{dom}(A_F^{1/2})$ pontosan akkor teljesül, ha található olyan $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{C}_0^\infty(I;\mathbb{K})$-beli sorozat, hogy $\|u_n - u\| \to 0$, és $\|u_n' - u_m'\| \to 0$. A parciális differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, hogy ez a feltétel valamely $u \in L^2(I)$ függvényre pontosan akkor teljesül, ha u eleme a $H_0^1(I)$ Szoboljev-térnek, amivel megmutattuk, hogy

$$\mathrm{dom}(A_F^{1/2}) = H_0^1(I).$$

Emellett egy $u \in \operatorname{dom}(A_F^{1/2})$ függvény $G(A_F^{1/2})$-beli gráf normájára fennáll, hogy

$$\|(u, A_F^{1/2}u)\|^2 = \|u\|^2 + \lim_{n\to\infty} \|u_n'\|^2,$$

ami pedig megegyezik az u függvény $H_0^1(I)$ Szoboljev-térbeli normájával. Ez azt jelenti, hogy a $G(A_F^{1/2})$ és $H_0^1(I)$ Hilbert-terek izometrikusan izomorfak.

Irodalomjegyzék

1. F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, 2006.
2. C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis*, Academic Press, New York and London, 1998.
3. S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, 1932.
4. S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert space*, Oxford University Press, 1961.
5. S. K. Berberian, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer, 1974.
6. B. Bollobás, *Linear Analysis*, Cambridge University Press, 1990.
7. J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1985.
8. J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2000.
9. J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer, 1984.
10. J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, 1960.
11. J. Dieudonné, *Treatise on analysis*, Vol. 2., Academic Press, 1960.
12. R. G. Douglas, On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17 (1966), 413–415.
13. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Wiley, New York, 1958.
14. N. Dunford, J. T. Schwartz *Linear Operators, Part II: Spectral Theory*, Wiley, New York, 1963.
15. K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, 2000.
16. M. Fabian, P. Hájek, P. Habala, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory*, Springer, 2011.
17. P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, 1951.
18. P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Springer Verlag, New York, 1982.
19. F. Hirsch, G. Lacombe, *Elements of functional analysis,* Vol. 192. Springer Science & Business Media, 2012.
20. R. Kadison, J. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Academic Press, New York, 1986.
21. T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* Vol. 132. Springer Science & Business Media, 2013.
22. L. Kérchy, *Hilbert-terek operátorai*, Polygon, Szeged, 2003.
23. J. Kristóf, *Az analízis elemei I-IV.*, ELTE, Budapest, 1997.
24. A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
25. V. Komornik, *Valós analízis előadások I-II.*, TypoTEX, 2003.
26. V. Lomonosov, Invariant subspaces for operators commuting with compact operators, *Functional Anal. Appl.*, 7 (1973), 55-56.
27. R. E. Magginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer Verlag, New York, 2012.
28. A. J. Michaels, Hilden's simple proof of Lomonosov's invariant subspace theorem, *Advances in Math.*, 25 (1977), 56-58.
29. G. Murphy, *C^*-algebras and operator theory,* Academic press, 2014.
30. G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer, 1989.
31. V. Prokaj, Z. Sebestyén, On extremal positive operator extensions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 62(3), 485–492.
32. H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
33. F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
34. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
35. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1986.
36. W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1991.

37. Z. Sebestyén, J. Stochel, Characterizations of positive selfadjoint extensions, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 135(5) (2007), 1389–1397.
38. Z. Sebestyén, Zs. Tarcsay, A reversed von Neumann theorem, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 80 (3-4) (2014), 659-664.
39. K. Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space,* Vol. 265., Springer Science & Business Media, 2012.
40. M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications to Analysis*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 15, Amer. Math. Soc., 1932
41. K. Ylinen, Compact and finite-dimensional elements of normed algebras, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.*, AI No. 428 (1968), 37 pp.
42. J. Väisälä, A proof of the Mazur-Ulam theorem, *American Mathematical Monthly*, 110 (2003), 633–635.
43. K. Vala, On compact sets of compact operators, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.* AI No. 351 (1964), 9 pp.
44. J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I.: Grundlagen*, Mathematische Leitfäden. Wiesbaden: B. G. Teubner, 2000.
45. D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer Berlin Heidelberg, 2006.